Математический анализ
Раздел: дифференциальные уравнения

Тема: ***Линейные уравнения с частными производными 1-го порядка***

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

§6. Линейные уравнения с частными производными первого порядка

1. Понятие уравнения с частными производными и его интегрирование

Уравнением с частными производными *называется соотношение, связывающее неизвестную функцию нескольких переменных, ее аргументы и ее частные производные.*

Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение, называется ***порядком уравнения****.*

Функция, обращающее уравнение с частными производными в тождество, называется ***решением*** *этого уравнения.*

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения с частными производными называется ***интегрированием*** *этого уравнения.*

Обыкновенное ДУ можно рассматривать как частный случай уравнения с частными производными.

$\Rightarrow$ Если уравнение с частными производными имеет решение, то решений будет множество.

Для обыкновенного ДУ порядка n вся совокупность решений (за исключением некоторых) представлялась функцией, зависящей от независимой переменной x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (общим решением).

Общее решение ДУ с частными производными тоже будет содержать некоторые произвольные элементы – функции.

Если уравнение можно разрешить относительно старшей частной производной, т.е. записать, например, в виде

$$\frac{\partial^m z}{\partial x_1^m} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots \right), \qquad (1)$$

где $k_1 + \ldots + k_n = k \le m$ и $k_1 < m$, то для выбора одного решения обычно полагают, что

$$\left.\begin{aligned} z\Big|_{x_1 = x_{10}} &= \varphi_0(x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{\partial z}{\partial x_1}\Bigg|_{x_1 = x_{10}} &= \varphi_1(x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}}\Bigg|_{x_1 = x_{10}} &= \varphi_{m-1}(x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где x_{10} – заданное значение, $\varphi_0(x_2,\ldots x_n)$, …, $\varphi_{m-1}(x_2,\ldots x_n)$ – заданные функции $n\!-\!1$ аргумента.

Условия (2) называют ***начальными условиями для уравнения*** (1).

Задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям (2), называется ***задачей Коши***.

В частности, для уравнения первого порядка вида

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) \qquad (3)$$

начальное условие будет иметь вид

$$z\,\Big|_{\,x_1 = x_{10}} = \varphi_0(x_2, \ldots, x_n), \qquad (4)$$

где x_{10} – заданное значение, $\varphi_0(x_2,\ldots x_n)$ – заданная функция n–1 аргумента.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ задачи Коши для уравнения с частными производными первого порядка в случае $z = z(x,y)$.

Рассмотрим уравнение $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$

Его решение $z = \varphi(x,y)$ – поверхность в пространстве $Oxyz$ (ее называют ***интегральной поверхностью***).

Общее решение – некоторое семейство поверхностей.

Начальное условие $z(x = x_0, y) = \varphi_0(y)$ задает в пространстве некоторую кривую $x = x_0$, $z(y) = \varphi_0(y)$.

Следовательно, ***задача Коши представляет собой нахождение поверхности, проходящей через заданную кривую*****.**

Замечание. По аналогии с трехмерным пространством, говорят, что

а) $(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)$ – точка $n+1$-мерного пространства,

б) $z = \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – гиперповерхность (поверхность n измерений) в $n+1$-мерном пространстве,

в) условия $x_1= x_{10}$, $z(x_2,\ldots,x_n) = \varphi_0(x_2,\ldots x_n)$ определяют в $n+1$-мерном пространстве гиперповерхность $n-1$-измерения.

Поэтому говорят, что для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка задача Коши в общем случае состоит в нахождении интегральной гиперповерхности, проходящей через заданную гиперповерхность $n-1$-измерения.

2. Первые интегралы системы ОДУ. Симметричная форма системы ОДУ

Рассмотрим систему

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}). \qquad (5)$$

Пусть общее решение системы (5) имеет вид:

$$y_i = \psi_i(x, C_1, \ldots, C_n) \quad (i = \overline{1, n}). \qquad (6)$$

В области $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения, система (6) может быть однозначно разрешена относительно C_1, C_2, …, C_n:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \\ \varphi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n. \end{cases} \qquad (7)$$

Совокупность равенств (7) называют ***общим интегралом системы*** (5), а каждое из равенств системы (7) называют ***первым интегралом системы*** (5).

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = C, \tag{8}$$

Условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \ldots + f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} = 0, \tag{9}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение (8) определяло первый интеграл системы (5) (***аналитический признак первого интеграла системы***).

Форма записи системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ldots,x_{n+1})}=\frac{dx_2}{F_2(x_1,\ldots,x_{n+1})}=\ldots=\frac{dx_{n+1}}{F_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})} \qquad (11)$$

называется ***симметричной*.**

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})=C\,, \qquad (12)$$

Условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot F_1(x_1,\ldots,x_{n+1})+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\cdot F_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})=0\,, \qquad (13)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение (12) определяло первый интеграл системы (11) (***аналитический признак первого интеграла системы в форме* (11)**).

3. Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным однородным уравнением с частными производными первого порядка*** называется уравнение вида

$$F_1(x_1,\ldots,x_n)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \qquad (14)$$

где $F_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G\subset\mathbf{R}^n$, $z = z(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – неизвестная функция.

1) Нахождение ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка.

Запишем систему ОДУ вида:

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{F_2(x_1,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{F_n(x_1,\ldots,x_n)}. \qquad (15)$$

Ее называют ***соответствующей*** уравнению (14).

ТЕОРЕМА 1. *Функция* $z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *является решением уравнения* (14) $\Leftrightarrow$ $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$ *является первым интегралом системы* (15).

Обозначим

1) $D_n(G)$ – множество непрерывно дифференцируемых на множестве $G \subset \mathbf{R}^n$ функций n переменных,
2) $C_n(G)$ – множество непрерывных на множестве $G \subset \mathbf{R}^n$ функций n переменных.

$D_n(G)$ и $C_n(G)$ являются линейными пространствами над $\mathbf{R}$.

Пусть $$F: D_n(G) \to C_n(G),$$

$$F[z] = F_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + F_n(x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Оператор $F[z]$ обладает следующим свойством:

$$F\left[\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_k)\right] = F[\psi_1] \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} + \ldots + F[\psi_k] \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_k} \qquad (16)$$

где $\psi_i(x_1, \ldots, x_n) \in D_n(G)$ $(i = \overline{1, k})$ и $\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ – непрерывно дифференцируемая функция аргументов $\psi_1, \ldots, \psi_k$.

Пусть найдена система независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений (15), образующих ее общий интеграл:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\ldots,x_n) = C_1, \\ \varphi_2(x_1,\ldots,x_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) = C_{n-1}. \end{cases}$$

Пусть Ф – произвольная непрерывно дифференцируемая функция n–1 аргумента.

Тогда $z = \Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ является решением уравнения (14) и справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)=C_i$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ – *независимые интегралы системы* (15) *и* Ф – *произвольная непрерывно дифференцируемая функция* n–1 *аргумента*, *то* $z=\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ – *общее решение уравнения* (14).

2) ЗАДАЧА КОШИ для линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка.

Рассмотрим уравнение

$$F_1(x_1,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}+\dots+F_n(x_1,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \qquad (14)$$

где $F_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G\subset\mathbf{R}^n$,

$z = z(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – неизвестная функция.

Требуется найти решение, удовлетворяющее условию

$$z(x_1,\dots,x_{n-1}, x_n = x_{n0}) = \Phi_0(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

где $\Phi_0(x_1,\dots,x_{n-1})$ – заданная функция $n-1$ аргумента.

Пусть найдена система независимых первых интегралов системы ДУ (15), образующих ее общий интеграл:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\dots,x_n)=C_1, \\ \varphi_2(x_1,\dots,x_n)=C_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)=C_{n-1}. \end{cases}$$

Обозначим
$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n0}) = \overline{\varphi}_1\,, \\ \varphi_2(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n0}) = \overline{\varphi}_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n0}) = \overline{\varphi}_{n-1}\,. \end{cases} \tag{17}$$

Разрешим (17) относительно $x_1,\ldots,x_{n-1}$ (это всегда можно сделать в окрестности точки $M_0(x_{10},x_{20}\ldots,x_{n0})$, такой что $F_i(M_0) \neq 0$). Получим:
$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\ldots,\overline{\varphi}_{n-1}), \\ x_2 = \omega_2(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\ldots,\overline{\varphi}_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\ldots,\overline{\varphi}_{n-1}). \end{cases} \tag{18}$$

Тогда решение уравнения (14), удовлетворяющее условию
$$z(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n = x_{n0}) = \Phi_0(x_1,\ldots,x_{n-1}),$$
будет иметь вид
$$z = \Phi_0(\omega_1(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}),\ldots,\omega_{n-1}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}))\,. \tag{19}$$

4. Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка*** называется уравнение вида

$$F_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_n}=P(x_1,\ldots,x_n,z), \qquad (20)$$

где $F_i(x_1,\ldots,x_n,z)$, $P(x_1, \ldots,x_n,z)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G\subset\mathbf{R}^{n+1}$,

$z = z(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – неизвестная функция.

Интегрирование уравнения (20) сводится к интегрированию некоторого линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка.

Предположим, что уравнение

$$u(x_1, \ldots, x_n, z) = 0$$

задает в неявном виде решение уравнения (20).

Тогда получим:

$$F_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n}+P(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad (21)$$

Для уравнения (21) находим общее решение :

$$u = \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) .$$

Следовательно, уравнение $\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0$ определяет в неявном виде общее решение (20).

Замечание. На практике уравнение (21) обычно не записывают. Записывают сразу его соответствующую систему.