Математический анализ
Раздел: дифференциальные уравнения

Тема: ***Понятие устойчивости решения ДУ и решения системы ДУ***

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

§5. Понятие устойчивости решения

1. Предварительные замечания

ТЕОРЕМА 1 (о непрерывной зависимости решения от начальных условий).

Пусть для уравнения $y' = f(x,y)$ *выполняются два условия:*

1) $f(x,y)$ *непрерывна в некоторой области* D *плоскости* xOy,

2) $f'_y(x,y)$ *в области* D *ограничена.*

Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ *решение* $y = \varphi(x)$ *, удовлетворяющее начальному условию* $y_0 = \varphi(x_0)$ *, непрерывно зависит от начальных данных на отрезке* $[a;b]$, *содержащем* x_0 .

Если решение задачи Коши $\exists$, единственно и непрерывно зависит от начальных данных, то говорят, что ***задача Коши поставлена корректно***.

2. Устойчивость по Ляпунову

Рассмотрим д.у. $$y' = f(x, y), \qquad (1)$$

где 1) $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области

$$D = \{(x; y) \mid x \in (a; +\infty),\ y \in D_1\}$$

2) $f'_y(x, y)$ ограничена в D

Пусть

1) $y = \varphi(x)$ – решение (1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ (где $y_0 \in D_1$, $x_0 \in (a; +\infty)$);

2) $y = \tilde{y}(x)$ – решение (1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = \tilde{y}_0$.

Предполагается, что решения $\varphi(x)$ и $\tilde{y}(x)$ определены для всех $x \geq x_0$ (говорят: «неограниченно продолжаемы вправо»)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y' = f(x,y)$ *называется* ***устойчивым по Ляпунову*** *при* $x \to +\infty$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для всякого решения* $y = \tilde{y}(x)$ *этого уравнения из неравенства*

$$\left|\tilde{y}(x_0) - \varphi(x_0)\right| = \left|\tilde{y}_0 - y_0\right| < \delta \qquad (2)$$

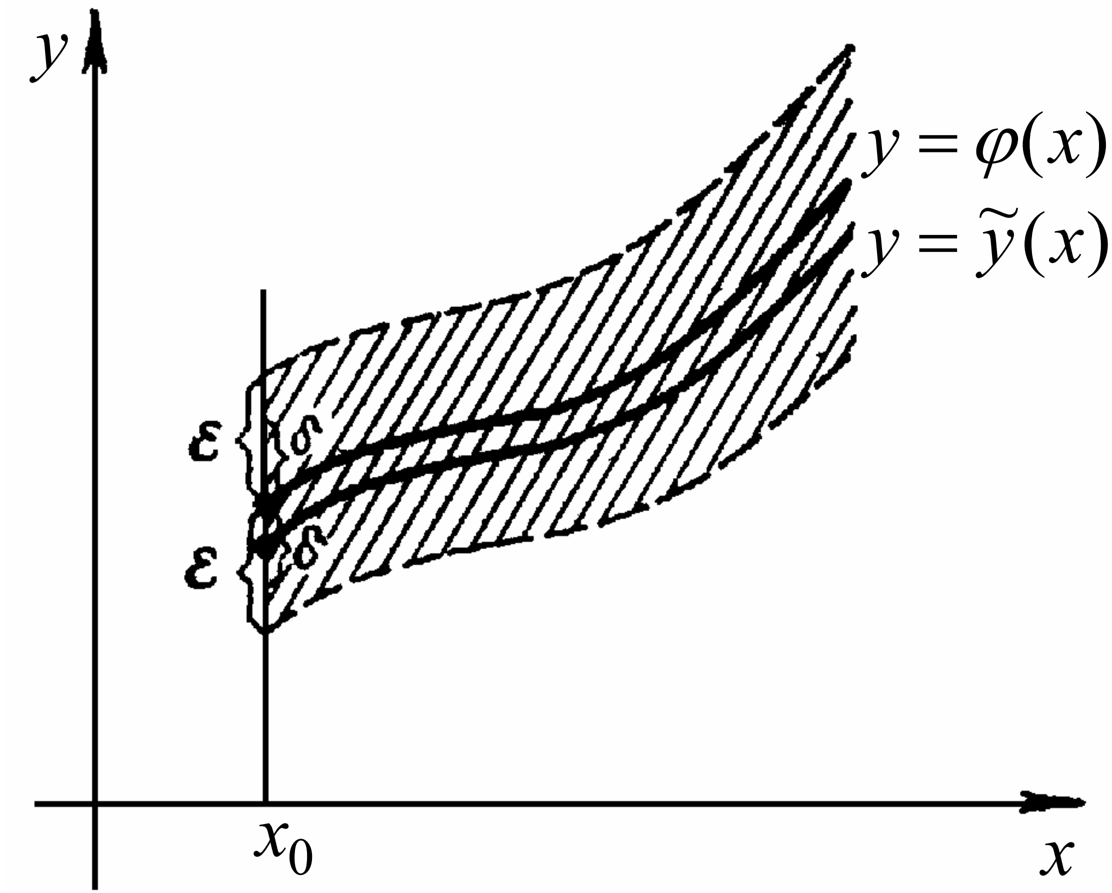
следует неравенство

$$\left|\tilde{y}(x) - \varphi(x)\right| < \varepsilon \qquad (3)$$

для всех $x \geq x_0$.

(т.е. решения, близкие по начальным значениям к решению $y = \varphi(x)$, остаются близкими и при всех $x \geq x_0$).

Геометрический смысл определения



Решение $y = \varphi(x)$ устойчиво, если для любой ε-полоски, содержащей кривую $y = \varphi(x)$, достаточно близкие к ней при $x = x_0$ интегральные кривые $y = \tilde{y}(x)$ целиком содержатся в указанной ε-полоске при всех $x \geq x_0$.

Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $y = \tilde{y}(x)$ уравнения (1) неравенство (3) не выполняется, то решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения называется ***неустойчивым***.

Неустойчивым следует считать и решение, не продолжаемое вправо при $x \to +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1) *называется* ***асимптотически устойчивым***, *если*

1) *решение* $y = \varphi(x)$ *устойчиво*,

2) *существует* $\delta_1 > 0$ *такое, что для любого решения* $y = \tilde{y}(x)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющего условию*

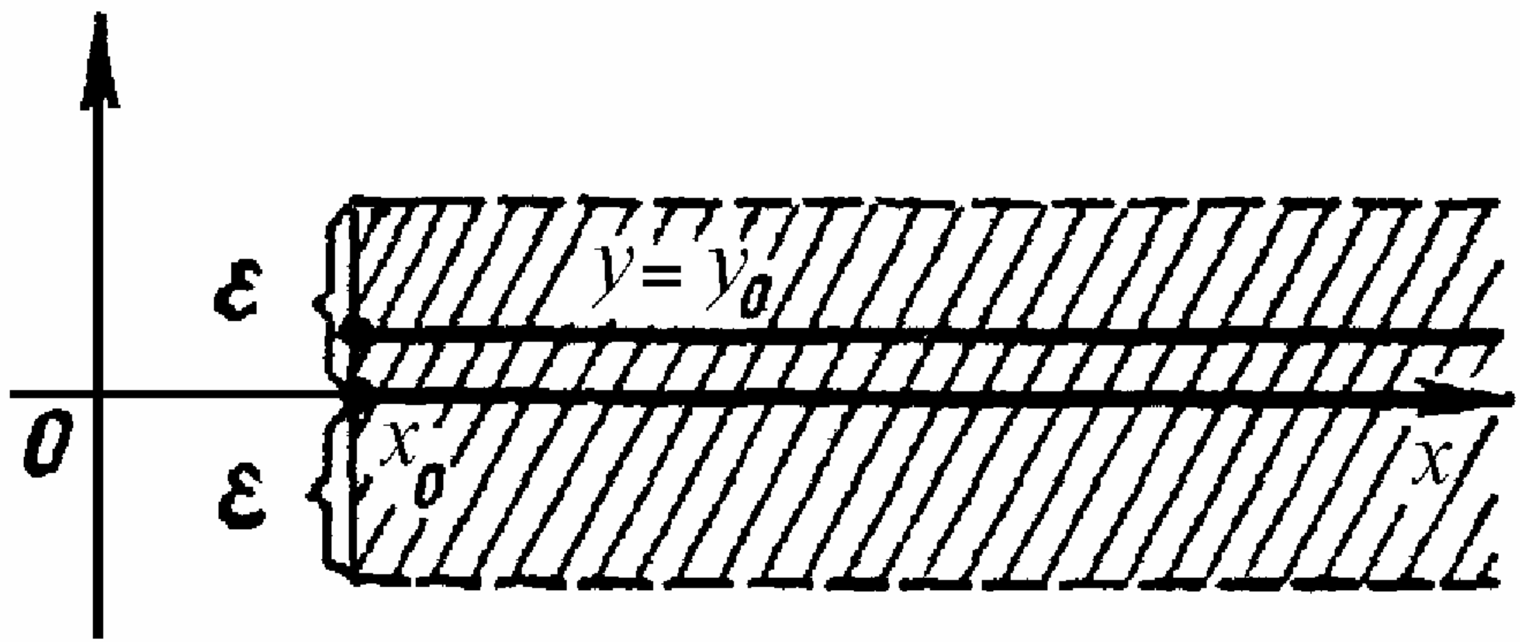
$$\left| \tilde{y}(x_0) - \varphi(x_0) \right| < \delta_1,$$

имеем

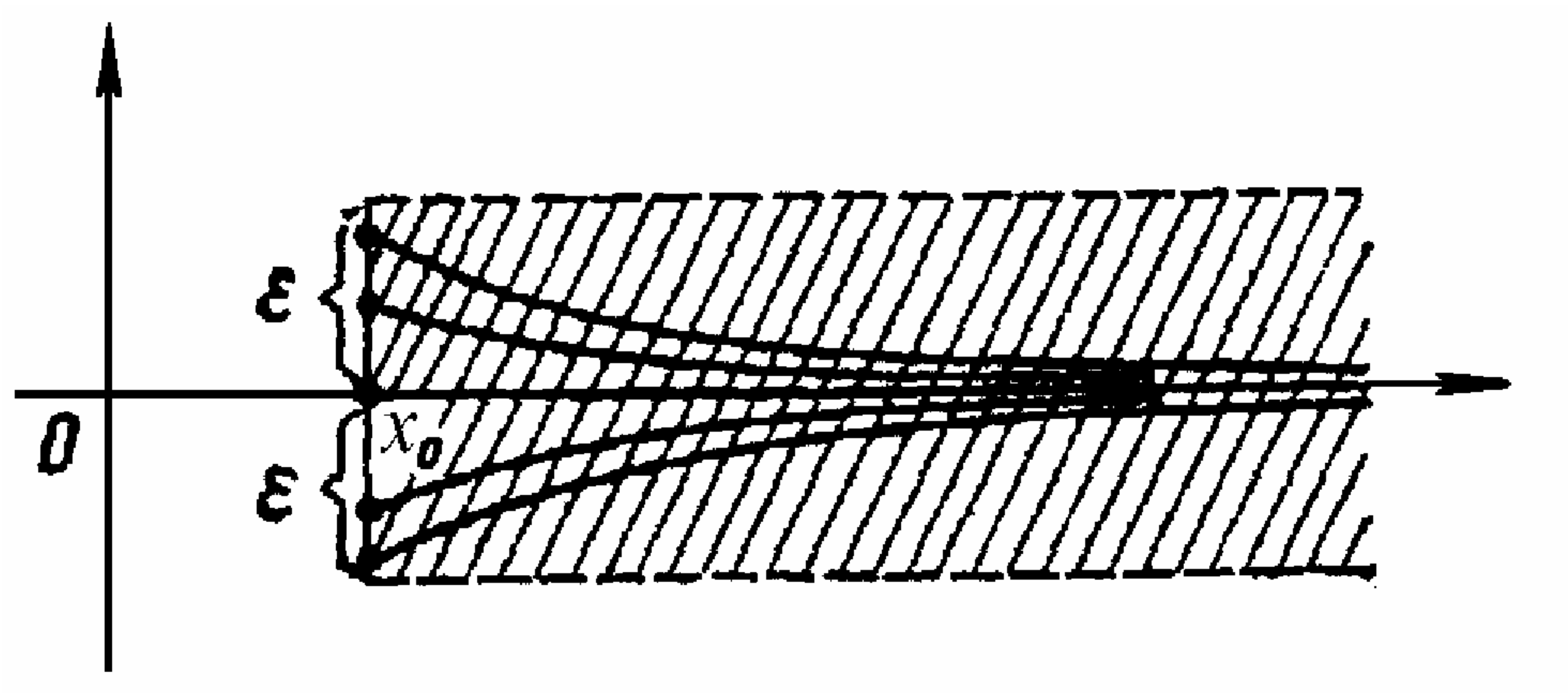
$$\lim_{x \to +\infty} \left| \tilde{y}(x) - \varphi(x) \right| = 0. \qquad (4)$$

(т.е. все решения $y = \tilde{y}(x)$, близкие по начальным условиям к асимптотически устойчивому решению $y = \varphi(x)$, не только остаются близкими к нему при $x \geq x_0$, но и неограниченно сближаются с ним при $x \to +\infty$).

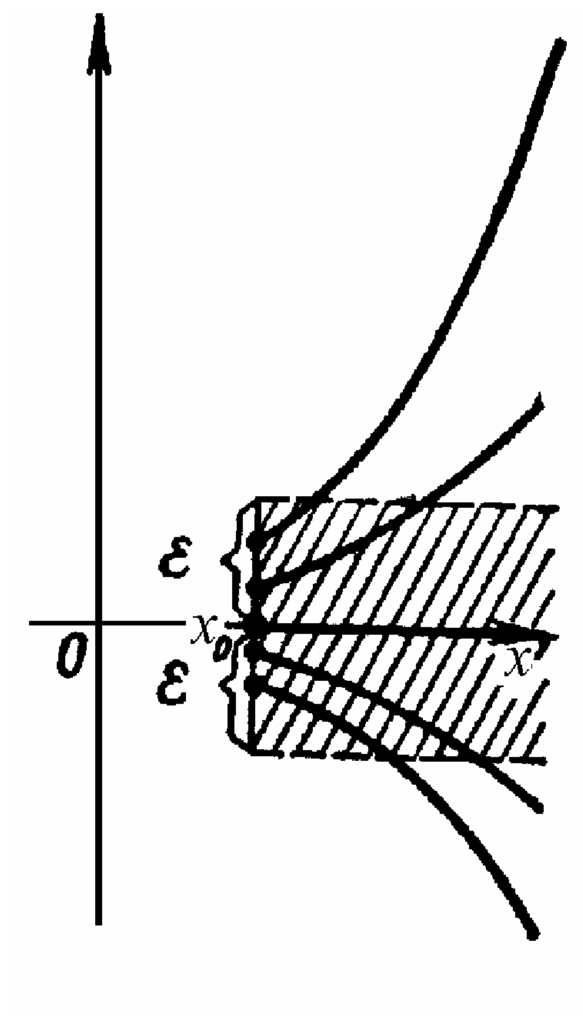
ПРИМЕР 1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение $y \equiv 0$ уравнения $y' = 0$.



ПРИМЕР 2. Исследовать на устойчивость тривиальное решение $y \equiv 0$ уравнения $y' = -a^2 y$ $(a = \mathrm{const})$.



ПРИМЕР 3. Исследовать на устойчивость тривиальное решение $y \equiv 0$ уравнения $y' = a^2 y$ ($a = \text{const}$).



Рассмотрим систему д.у.

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,, \quad i = 1{,}2, \ldots, n\,, \tag{5}$$

где 1) $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определена и непрерывна в некоторой области

$$D = \{(x; y_1; \ldots, y_n) \mid x \in (a; +\infty), (y_1, \ldots, y_n) \in D_1 \subseteq \mathbf{R}^{(n)}\}$$

2) $(f_i)'_{y_j}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ($j = 1{,}2, \ldots, n$) ограничена в D

Определение устойчивости и асимптотической устойчивости решения $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ системы (5) дается так же как для уравнения (1).

При этом неравенства (2) заменяются на систему неравенств

$$\left| \widetilde{y}_i(x_0) - \varphi_i(x_0) \right| < \delta \quad (i = \overline{1, n})\,,$$

неравенство (3) – на систему неравенств

$$\left| \widetilde{y}_i(x) - \varphi_i(x) \right| < \varepsilon \quad (i = \overline{1, n})\,, \tag{6}$$

а условие (4) – на совокупность условий

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \widetilde{y}_i(x) - \varphi_i(x) \right| = 0 \quad (i = \overline{1, n})\,,$$

Решение $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ системы (5) называется ***неустойчивым***, если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $y = \tilde{y}_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ хотя бы одно из неравенств (6) не выполняется.

Неустойчивым следует считать и решение, не продолжаемое вправо при $x \to +\infty$.

Замечание. Вопрос об устойчивости решения $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ системы (5) сводится к вопросу об устойчивости тривиального решения системы, получаемой из данной заменой $z_i(x) = y_i(x) - \varphi_i(x)$, $(i = \overline{1,n})$.

Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что на устойчивость исследуются именно тривиальные решения систем.

3. Устойчивость автономных систем. Типы точек покоя

Обобщив геометрическую терминологию, считаем, что *решение системы* ДУ

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \dots, \quad y_n = \varphi_n(x)$$

представляет собой интегральную кривую $(n + 1)$*-мерного пространства переменных* $x, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Решению системы ДУ можно придать другой геометрический смысл.

Рассмотри систему $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases}$

Будем рассматривать переменную x как параметр (обычно подразумевают, что x – время).

Тогда $y_1 = \varphi(x)$, $y_2 = \psi(x)$ – параметрические уравнения кривой на плоскости y_1Oy_2.

Эту кривую называют ***траекторией системы*** (***фазовой траекторией***).

Плоскость y_1Oy_2 в этом случае называют ***фазовой плоскостью***.

С геометрической точки зрения фазовые траектории – проекции интегральных кривых на фазовую плоскость.

Аналогичную терминологию принято использовать и для нормальной системы n уравнений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Нормальная система дифференциальных уравнений называется* ***автономной****, если ее правые части* f_i *не зависят явно от* x, *т.е. если она имеет вид*

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Пусть имеем автономную систему:

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}). \tag{8}$$

Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – последовательность чисел такая, что

$$f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Тогда:

1) функции $y_i \equiv a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ будут решением системы (8);
2) последовательность чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – точка фазового пространства, в которую проецируется решение $y_i \equiv a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Точку $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называют в этом случае ***точкой покоя*** (***положением равновесия***) автономной системы (8).

Автономная система (8) всегда имеет тривиальное решение $y_i \equiv 0$ $(i = 1,2,\ldots)$.

Проекция на фазовое пространство решения $y_i \equiv 0$ $(i = 1,2,\ldots)$ – точка $(0;\, 0;\, \ldots;\, 0)$

$\Rightarrow$ $(0;\, 0;\, \ldots;\, 0)$ – точка покоя автономной системы.

Исследование тривиального решения автономной системы можно заменить исследованием соответствующей ему точки покоя $(0;\, 0;\, \ldots;\, 0)$.

Обозначим

$$S(R) = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{(n)} \,|\, (y_1)^2 + (y_2)^2 + \ldots + (y_n)^2 \le R^2\}.$$

Т.е. $S(R)$ – замкнутая R-окрестность точки $(0;\, 0;\, \ldots;\, 0)$ пространства $\mathbb{R}^{(n)}$.

Будем называть $S(R)$ ***n-мерным шаром***.

Будем считать, что для рассматриваемой системы в $S(R)$ выполнены условия теоремы существования и единственности решения системы.

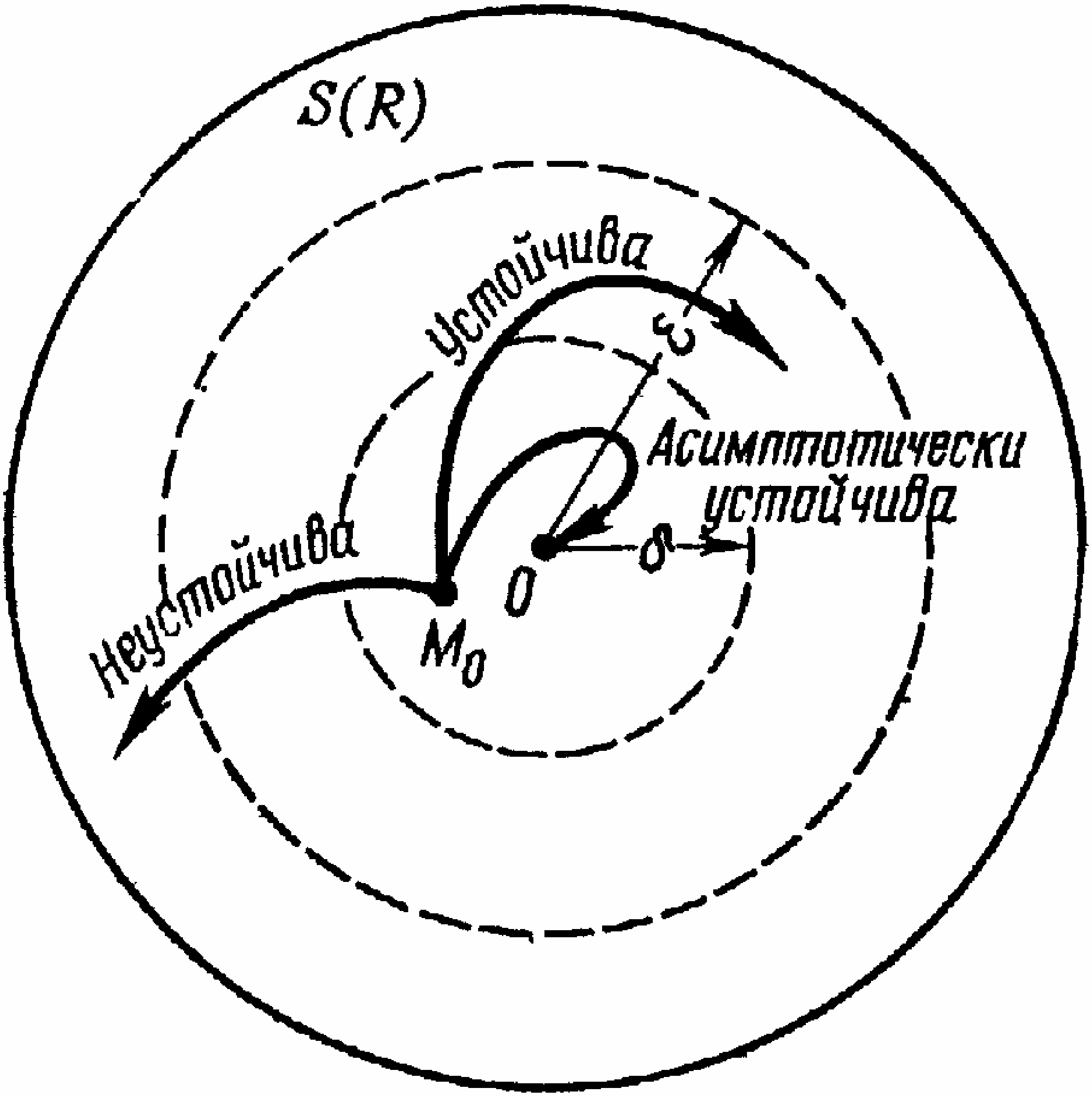
ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Будем говорить, что точка покоя (0; 0; …; 0) *системы* (8) ***устойчива***, *если* $\forall\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < R)$ $\exists\delta > 0$ *такое, что любая траектория системы, начинающаяся в момент времени* $x = x_0$ *в точке* $M_0 \in S(\delta)$ *в дальнейшем остается в шаре* $S(\varepsilon)$.

Точка покоя (0; 0; …; 0) ***асимптотически устойчива*** *если*

1) *она устойчива;*

2) $\exists\delta_1 > 0$ *такое, что любая траектория системы, начинающаяся в точке* $M_0 \in S(\delta_1)$ *стремится к началу координат* (0; 0; …; 0), *когда время* x *неограниченно растет* (*т.е. при* $x \to +\infty$).


S(R)
Устойчива
Асимптотически
устойчива
Неустойчива
ε
δ
O
M₀

Рассмотрим, например, линейную однородную систему

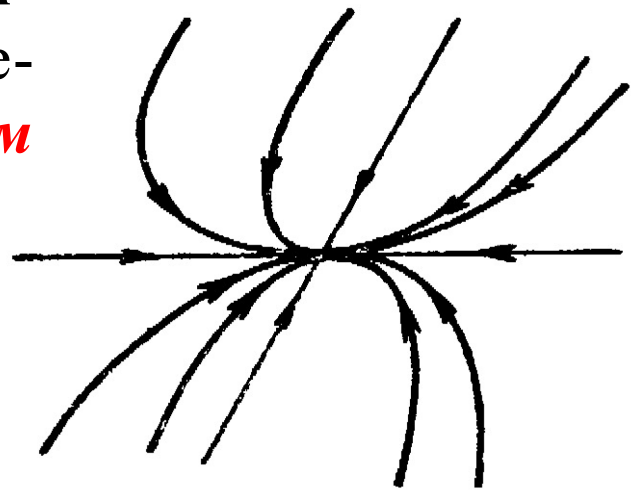
$$\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z\,, \\ z' = a_{21}y + a_{22}z\,, \end{cases}$$

где a_{ij} – числа и $\left|\mathbf{A}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

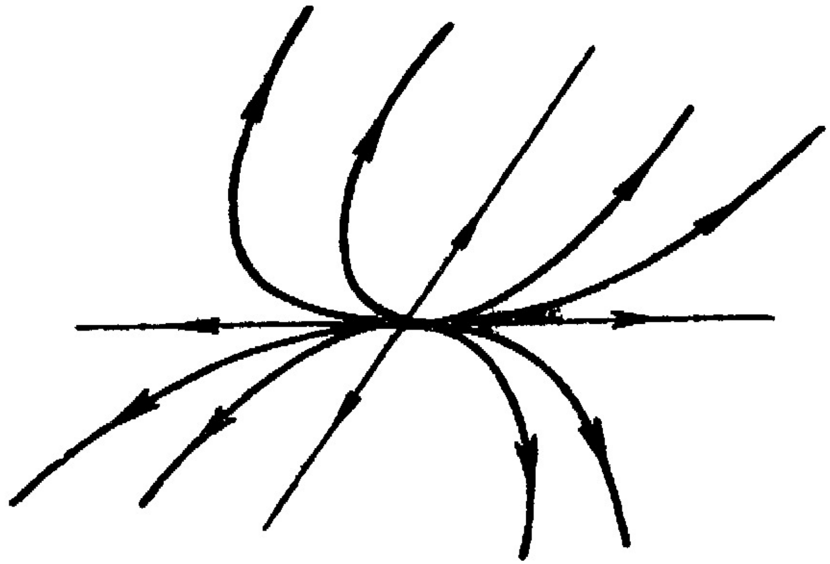
Изучив все возможные случаи решений, получим следующие расположения траекторий в окрестности точки покоя $O(0;\,0)$:

1) Если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$

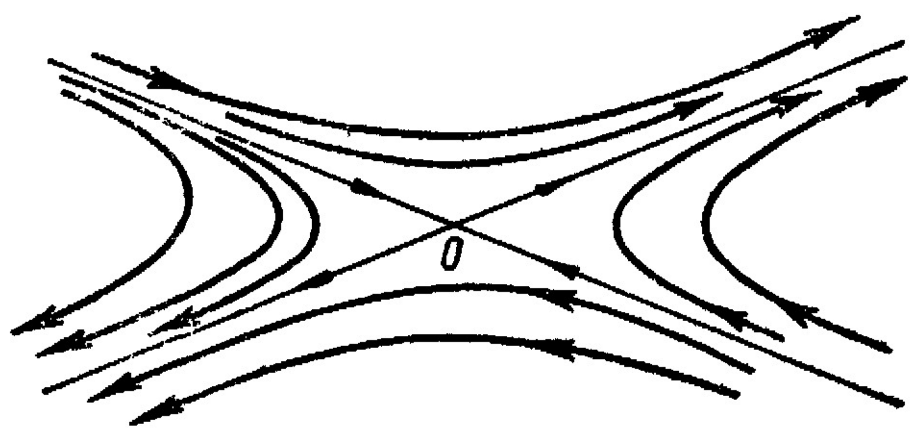
Точка покоя **асимптотически устойчива**. Точку покоя при таком расположении траекторий называют ***устойчивым узлом***.



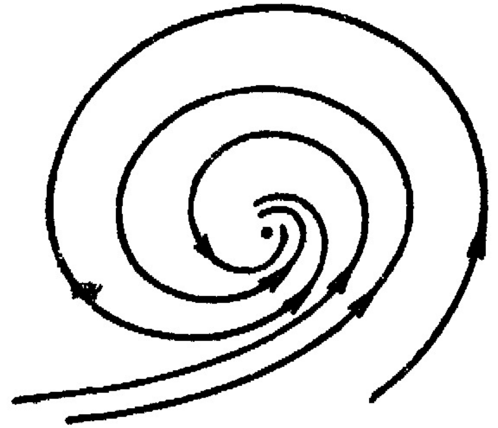
2) Если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Точка покоя **неустойчива**. Ее называют ***неустойчивым узлом***.



3) Если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Точка покоя **неустойчива**. Ее называют ***седлом***.

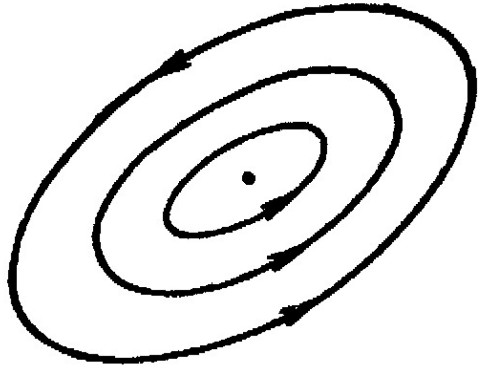


4) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \quad (\beta \neq 0), \quad \alpha < 0$. Точка покоя **асимптотически устойчива**. Ее называют ***устойчивым фокусом***.



5) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \quad (\beta \neq 0), \quad \alpha > 0$. Точка покоя **неустойчива**. Ее называют ***неустойчивым фокусом***.

6) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \quad (\beta \neq 0), \quad \alpha = 0$. Точка покоя **устойчива**. Ее называют ***центром***.



7) Если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ – рисунок 7 или 8. Точка покоя **асимптотически устойчива**. При таком расположении траекторий, как на рисунке 7, ее называют ***устойчивым вырожденным узлом***. Если траектории располагаются как на рисунке 8 – ***дикритическим узлом***.

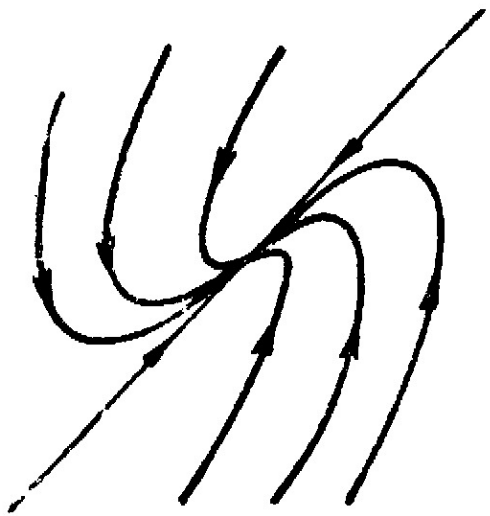


Рисунок 7

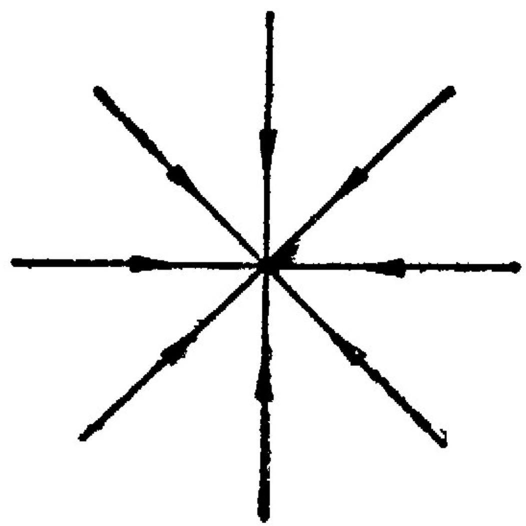


Рисунок 8

8) Если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ – рисунок 9 или 10. Точка покоя **неустойчива**. Ее называют ***неустойчивым вырожденным узлом***.

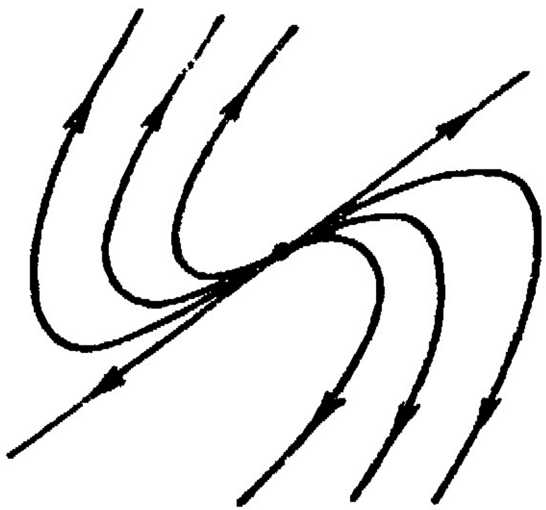


Рисунок 9

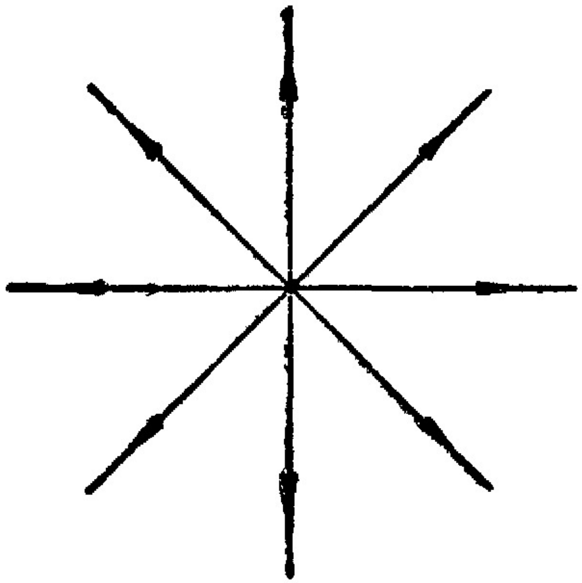


Рисунок 10

Удалось установить связь устойчивости любого решения системы *n* уравнений с постоянными коэффициентами с соответствующим решению характеристическим корнем матрицы системы.

Доказано, что:

1) *Если все характеристические корни матрицы системы имеют отрицательную действительную часть, то* ***все решения*** *системы асимптотически устойчивы*.

2) *Если хотя бы один характеристический корень матрицы системы имеет положительную действительную часть, то* ***все решения*** *системы неустойчивы*.

3) *Если среди характеристических корней есть простые корни с нулевой действительной частью (т.е. чисто мнимые или равный нулю корень), а остальные корни, если они есть, имеют отрицательную действительную часть, то* ***все решения*** *устойчивы, но асимптотической устойчивости нет.*

4. Устойчивость по первому (линейному) приближению

Пусть дана автономная система ДУ:

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1,n}). \qquad (9)$$

и пусть (0; 0; …; 0) – точка покоя системы (9).

Будем предполагать, что $f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ дифференцируемы в окрестности точки O достаточное число раз (два и более).

Тогда, по формуле Тейлора

$$f_i(y_1,\ldots,y_n) = f_i(0,\ldots,0) + \frac{df_i(0,\ldots,0)}{1!} + R_i(y_1,\ldots,y_n),$$

где $df_i(0,\ldots,0) = \dfrac{\partial f_i(O)}{\partial y_1}\cdot \Delta y_1 + \dfrac{\partial f_i(O)}{\partial y_2}\cdot \Delta y_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_i(O)}{\partial y_n}\cdot \Delta y_n$,

$$R_i(y_1,\ldots,y_n) = o(\sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + \ldots + (\Delta y_n)^2}.$$

По условию задачи $\quad f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0,$

$$\Delta y_i = y_i - 0 = y_i\ .$$

Обозначим: $$\frac{\partial f_i(O)}{\partial y_j} = a_{ij} \quad (i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,n}).$$

Тогда систему (9) можно переписать в виде

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i(y_1, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1,n}).$$

Рассмотрим систему

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = \overline{1,n}). \qquad (10)$$

Систему (10) называют ***системой первого*** (***линейного***) ***приближения системы*** (9).

ТЕОРЕМА.

Справедливы следующие утверждения:

1) *если все характеристические корни матрицы* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *системы* (10) *имеют отрицательные действительные части, то точка покоя* $O(0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ *системы* (9) *и* (10) *асимптотически устойчива*;

2) *если хотя бы один характеристический корень матрицы* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *системы* (10) *имеет положительную действительную часть, то точка покоя* $O(0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ *системы* (9) *и* (10) *неустойчива*;

3) *если все действительные части характеристических корней матрицы* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, то исследование устойчивости тривиального решения системы* (9) *по первому приближению невозможно.*