Математический анализ
Раздел: дифференциальные уравнения

Тема: ***Системы линейных ДУ: неоднородные системы***

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

3. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\mathbf{Y}' - \mathbf{AY} = \mathbf{B}\,. \qquad (1)$$

Если известно общее решение соответствующей однородной системы

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}\,, \qquad (2)$$

то можно найти общее решение неоднородной системы (1) методом, который называют ***методом вариации постоянных***.

Суть метода вариации постоянных

1) Пусть $\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2},\dots,\mathbf{Y_n}$ – ф.с.р. линейной однородной системы (2). Тогда общее решение (2):

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} + \dots C_n\mathbf{Y_n}\,, \qquad (3)$$

где $C_1,C_2,\dots,C_n$ – произвольные постоянные.

2) Полагаем, что ***решение линейной неоднородной системы по структуре совпадает с решением соответствующей однородной системы***, т. е. имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1(x)\cdot\mathbf{Y_1} + C_2(x)\cdot\mathbf{Y_2} + \dots C_n(x)\cdot\mathbf{Y_n}\,, \qquad (4)$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$, …, $C_n(x)$ – некоторые неизвестные функции.

При этом, для функций $C_1(x)$, $C_2(x)$, …, $C_n(x)$ будет справедливо утверждение:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B}.$$

Более подробно:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{21} + \ldots + C_n'(x)y_{n1} = b_1(x), \\ C_1'(x)y_{12} + C_2'(x)y_{22} + \ldots + C_n'(x)y_{n2} = b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_{1n} + C_2'(x)y_{2n} + \ldots + C_n'(x)y_{nn} = b_n(x). \end{cases} \qquad (5)$$

Рассмотрим систему (5). Имеем:

а) (5) – линейная неоднородная система относительно $C_i'(x)$.

б) Определитель системы (5) – $W[\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \ldots, \mathbf{Y}_{\boldsymbol{n}}]$.

Так как $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \ldots, \mathbf{Y_n}$ – линейно независимы, то

$$W[\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \ldots, \mathbf{Y_n}] \neq 0.$$

$\Rightarrow$ Система (5) имеет единственное решение

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = \overline{1,n}).$$

$$\Rightarrow \quad C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + C_i \quad (i = \overline{1,n}), \qquad (6)$$

где C_i – произвольные постоянные.

Подставим найденные $C_i(x)$ в (4) и получим общее решение неоднородной системы (1):

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx + C_i \right) \mathbf{Y}_i \,. \tag{7}$$

Замечание. (7) можно переписать в виде

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx \right) \mathbf{Y}_i \,.$$

Первая сумма $\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y}_i$ – общее решение соответствующей однородной системы (2).

Вторая сумма $\overline{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx \right) \mathbf{Y}_i$ – частное решение системы (1) (получается из общего решения (7) при $C_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

ТЕОРЕМА 6 (о структуре общего решения неоднородной системы дифференциальных уравнений).

Общее решение неоднородной системы

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B}$$

с непрерывными на $[a;b]$ *коэффициентами* $a_{ij}(x)$ *и правыми частями* $b_i(x)$, *равно сумме общего решения соответствующей однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$ *и частного решения* $\bar{\mathbf{Y}}$ *рассматриваемой неоднородной системы, т. е.*

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} + \ldots C_n\mathbf{Y}_{\boldsymbol{n}} + \bar{\mathbf{Y}}, \qquad (8)$$

где $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \ldots, \mathbf{Y_n}$ – *фундаментальная система решений однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 7 (о наложении решений).

Если $\mathbf{Y_i}$ – *решения неоднородных систем*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B_i} \quad (i = 1, 2, \ldots m),$$

то их сумма $\mathbf{Y_1} + \mathbf{Y_2} + \ldots + \mathbf{Y_m}$

является решением неоднородной системы

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + (\mathbf{B_1} + \mathbf{B_2} + \ldots + \mathbf{B_m}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО