Математический анализ
Раздел: дифференциальные уравнения

Тема: ***Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами***

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

§4. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему ЛОДУ вида

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j \qquad (i = \overline{1,n}), \tag{1}$$

где a_{ij} – постоянные.

Такую систему называют ***линейной однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами***.

Пусть

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу **A** называют ***матрицей системы*** (1).

Существует связь между ф.с.р. системы (1) и собственными векторами ее матрицы **A**.

Нахождение фундаментальной системы решений системы (1) с использованием собственных векторов матрицы **A** называется ***методом Эйлера***.

Предполагаем, что решение системы (1) имеет вид:

$$y_1 = d_1 \cdot e^{\lambda x},\ y_2 = d_2 \cdot e^{\lambda x},\ \ldots,\ y_n = d_n \cdot e^{\lambda x}, \qquad (2)$$

где λ, d_1, d_1, …, d_n – неизвестные действительные числа, которые нужно выбрать так, чтобы функции (2) удовлетворяли системе (1).

Запишем систему (1) в матричном виде:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}. \qquad (3)$$

По предположению

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda x} \\ d_2 e^{\lambda x} \\ \ldots \\ d_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x}\mathbf{D}, \text{ где } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix}. \quad \Rightarrow \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} d_1 \lambda e^{\lambda x} \\ d_2 \lambda e^{\lambda x} \\ \ldots \\ d_n \lambda e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{D}.$$

Подставим $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y}'$ в (3):

$$\lambda \cdot e^{\lambda x}\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot (e^{\lambda x}\mathbf{D}) ,$$

$$\lambda \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} ,$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - \lambda \cdot \mathbf{D} = \mathbf{O} ,$$

$$\Rightarrow \ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{O} . \qquad (4)$$

(4) – матричная запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными.

Система (4) имеет нетривиальные решения $\Leftrightarrow$ $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

Это означает, что

1) *λ должно является действительным характеристическим корнем* (*т. е. собственным значением*) *матрицы* $\mathbf{A}$,

2) $\mathbf{D}$ – *является собственным вектором матрицы* $\mathbf{A}$, *относящимся к* λ.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет n характеристических корней, НО среди них могут быть комплексные и кратные.

Рассмотрим каждый из возможных случаев.

1. Характеристические корни матрицы **A** действительны и различны

Для каждого характеристического корня λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) найдем собственный вектор $\mathbf{D_i} = (d_{ji})$ и запишем решения $\mathbf{Y_i}$:

$$\mathbf{Y_1} = e^{\lambda_1 x}\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} d_{11} \\ e^{\lambda_1 x} d_{21} \\ \ldots \\ e^{\lambda_1 x} d_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = e^{\lambda_2 x}\mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_2 x} d_{12} \\ e^{\lambda_2 x} d_{22} \\ \ldots \\ e^{\lambda_2 x} d_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{Y}_n = e^{\lambda_n x}\mathbf{D_n} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_n x} d_{1n} \\ e^{\lambda_n x} d_{2n} \\ \ldots \\ e^{\lambda_n x} d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \ldots, \mathbf{Y_n}$ линейно независимы и образуют ф.с.р. Общее решение системы в этом случае имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} + \ldots\ C_n\mathbf{Y_n}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1 d_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{12} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{1n} e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1 d_{21} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{22} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{2n} e^{\lambda_n x}, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ y_n = C_1 d_{n1} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{n2} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{nn} e^{\lambda_n x}. \end{cases}$$

2. Характеристические корни матрицы **A** различны, но среди них есть комплексные

Характеристический многочлен матрицы **A** имеет действительные коэффициенты

$\Rightarrow$ комплексные корни будут появляться сопряженными парами.

Пусть характеристическими корнями являются числа

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i , \qquad \lambda_2 = \alpha - \beta i .$$

Рассмотрим две системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} \quad \text{и} \quad (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} .$$

В алгебре доказано: *если для них выбрать одни и те же переменные свободными и придать им сопряженные значения, то для зависимых переменных тоже получатся сопряженные значения.*

Пусть $\mathbf{D} = (d_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}$.

$\Rightarrow \quad \overline{\mathbf{D}} = (\overline{d}_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}$.

Обозначим: $\mathbf{Z_1} = e^{\lambda_1 x}\mathbf{D}, \qquad \mathbf{Z_2} = e^{\lambda_2 x}\overline{\mathbf{D}}.$

Матрицы-столбцы $\mathbf{Z_1}$ и $\mathbf{Z_2}$ будут удовлетворять матричному уравнению $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$.

Полагаем $\mathbf{Y_1} = \dfrac{1}{2}\left(\mathbf{Z_1} + \mathbf{Z_2}\right), \quad \mathbf{Y_2} = \dfrac{1}{2i}\left(\mathbf{Z_1} - \mathbf{Z_2}\right).$

Матрицы столбцы $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ состоят из действительных функций и тоже удовлетворяют матричному уравнению $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$.

Можно доказать, что $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ *линейно независимы и, следовательно*, *могут быть включены в* ф.с.р.

Замечание. На практике матрицу-столбец $\mathbf{Z_2}$ не записывают, так как $\mathbf{Z_2} = \overline{\mathbf{Z}}_\mathbf{1}$.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Y_1} = \mathrm{Re}\mathbf{Z_1}\,, \quad \mathbf{Y_2} = \mathrm{Im}\mathbf{Z_1}\,.$$

3. Характеристические корни матрицы **A** действительные, но среди них есть кратные

Пусть λ – действительный характеристический корень матрицы **A** кратности ℓ,

$$r = rang(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) .$$

<u>Первый случай</u>: $\boldsymbol{n - r = \ell}$.

Тогда ф.с.р. системы $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из ℓ решений.

$\Rightarrow \exists\ \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 , \ldots, \mathbf{D}_\ell$ – линейно независимые собственные векторы матрицы **A**, относящиеся к λ .

$\Rightarrow \mathbf{Y}_1 = e^{\lambda x} \cdot \mathbf{D}_1 , \mathbf{Y}_2 = e^{\lambda x} \cdot \mathbf{D}_2 , \ldots, \mathbf{Y}_\ell = e^{\lambda x} \cdot \mathbf{D}_\ell$ – линейно независимые решения системы ДУ.

$\Rightarrow \mathbf{Y}_1 , \mathbf{Y}_2 , \ldots, \mathbf{Y}_\ell$ входят в ф.с.р. системы ДУ.

Второй случай: $\boldsymbol{n - r \neq \ell}$

Тогда ф.с.р. системы $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из $k < \ell$ решений.

$\Rightarrow$ можем получить k линейно независимых решений системы ДУ.

Существует два способа найти все решения.

Первый способ – искать ℓ решений вида

$$\mathbf{Y} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} a_{10} & + & a_{11}x & + & \dots & + & a_{1,\ell-1}x^{\ell-1} \\ a_{20} & + & a_{21}x & + & \dots & + & a_{2,\ell-1}x^{\ell-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & + & a_{n1}x & + & \dots & + & a_{n,\ell-1}x^{\ell-1} \end{pmatrix},$$

где коэффициенты a_{ij} находят, подставляя $\mathbf{Y}$ в исходную систему.

Второй способ решения – найти k линейно независимых решений СДУ, а недостающие $\ell - k$ решений искать в виде

$$\mathbf{Y_{k+1}} = e^{\lambda x}(\mathbf{D_{k+1,0}} + \mathbf{D_{k+1,1}}x),$$

$$\mathbf{Y_{k+2}} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D_{k+2,0}} + \mathbf{D_{k+2,1}}x + \mathbf{D_{k+2,2}} \cdot \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\mathbf{Y_{k+3}} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D_{k+3,0}} + \mathbf{D_{k+3,1}}x + \mathbf{D_{k+3,2}} \cdot \frac{x^2}{2} + \mathbf{D_{k+3,3}} \cdot \frac{x^3}{3}\right)$$

и т.д.

Здесь $\mathbf{D_{ij}}$ – числовые матрицы-столбцы, определяемые так, чтобы $\mathbf{Y_i}$ были решениями системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим 2-й метод применительно к системам ДУ 3-го порядка.

В этом случае **A** – матрица 3-го порядка,

$$\Rightarrow \ \ell = 2 \quad \text{или} \quad \ell = 3.$$

1) Пусть $\ell = 2\,,\ n - r = 1$.

$\exists\ \mathbf{D_1}$ – линейно независимый собственный вектор матрицы **A**, относящийся к λ .

$\Rightarrow \mathbf{Y_1} = e^{\lambda x} \cdot \mathbf{D_1}$ – решение системы ДУ

Еще одно решение системы ДУ, входящее в ф.с.р., будем искать в виде

$$\mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}\,(\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D_{21}}\,x)\ .$$

При этом получим:

$\mathbf{D_{21}} = \mathbf{D_1}$ – ***собственный вектор* A, *относящийся к*** λ ,

$\mathbf{D_{20}}$ – ***любое решение системы линейных уравнений***

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D_1}\ .$$

Таким образом, при $\ell = 2$, $n - r = 1$, в ф.с.р. системы ДУ войдут решения:

$$\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x} \cdot \mathbf{D_1} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D_1} x) .$$

Замечание. При получении данного результата нигде не использовался тот факт, что система ДУ третьего порядка.

$\Rightarrow$ Он останется справедливыми и для линейной однородной системы порядка n в случае, если $\ell = 2$, $n - r = 1$.

ПРИМЕР 4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2 . \end{cases}$$

2) Пусть $\ell = 3$, $n - r = 1$.

$\exists$ $\mathbf{D_1}$ – линейно независимый собственный вектор матрицы **A**, относящийся к λ .

$\Rightarrow \mathbf{Y_1} = e^{\lambda x} \cdot \mathbf{D_1}$ – решение системы ДУ.

Еще два решения системы ДУ, входящие в ф.с.р., будем искать в виде $\mathbf{Y_2} = e^{\lambda x} (\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D_{21}} x)$,

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D_{30}} + \mathbf{D_{31}}x + \mathbf{D_{32}} \cdot \frac{x^2}{2} \right).$$

При этом получим:

$\mathbf{D_{21}} = \mathbf{D_{32}} = \mathbf{D_1}$ – ***собственный вектор* A*, относящийся к*** λ ,

$\mathbf{D_{20}} = \mathbf{D_{31}}$ – ***любое решение системы линейных уравнений***

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D_1} .$$

$\mathbf{D_{30}}$ – ***любое решение системы линейных уравнений***

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D_{20}} .$$

Таким образом, при $\ell = 3,\ n - r = 1$, в ф.с.р. системы ДУ войдут решения:

$$\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1}, \quad \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D}_1 x), \quad \mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D_{30}} + \mathbf{D_{20}}x + \mathbf{D_1} \cdot \frac{x^2}{2}\right).$$

Замечание. Результат останется справедливыми и для линейной однородной системы порядка n в случае, если $\ell = 3,\ n - r = 1$.

ПРИМЕР 5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 3y_3, \\ y_2' = -2y_1 - 6y_2 + 13y_3, \\ y_3' = -y_1 - 4y_2 + 8y_3. \end{cases}$$

3) Пусть $\ell = 3$, $n - r = 2$.

$\exists$ $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ – линейно независимые собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, относящиеся к λ .

$\Rightarrow \mathbf{Y}_1 = e^{\lambda x} \cdot \mathbf{D}_1$, $\mathbf{Y}_2 = e^{\lambda x} \cdot \mathbf{D}_2$ – линейно независимые решения системы ДУ.

Еще одно решение системы ДУ, входящее в ф.с.р., будем искать в виде

$$\mathbf{Y}_3 = e^{\lambda x} (\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31} x) \ .$$

При этом, ранее получили, что

$\mathbf{D}_{31}$ – ***собственный вектор*** $\mathbf{A}$, ***относящийся к*** λ , т.е.

$$\mathbf{D}_{31} = \alpha \cdot \mathbf{D}_1 + \beta \cdot \mathbf{D}_2 \ ,$$

где α, β – некоторые числа, ***одновременно не равные нулю***, которые следует выбрать так, чтобы была совместна система

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}_{31} \ .$$

$\mathbf{D}_{30}$ – ***любое решение системы линейных уравнений***

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}_{31} \ .$$

Таким образом, при $\ell = 3,\ \ n - r = 2$, в ф.с.р. системы ДУ войдут решения:

$$\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x} \cdot \mathbf{D_1}, \qquad \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x} \cdot \mathbf{D_2}, \qquad \mathbf{Y_3} = e^{\lambda x} (\mathbf{D_{30}} + \mathbf{D_{31}} x) .$$

Замечание. Результат останется справедливыми и для линейной однородной системы порядка n в случае, если $\ell = 3,\ \ n - r = 2$.

ПРИМЕР 6. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1, \\ y_2' = y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + 3y_3 . \end{cases}$$

4. Среди характеристических корней матрицы **A** есть кратные комплексные корни

В этом случае алгебраические трудности метода Эйлера возрастают настолько, что лучше использовать другие методы интегрирования.