Математический анализ
Раздел: дифференциальные уравнения

Тема: *Системы дифференциальных уравнений: основные понятия, метод исключения*

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

Глава VI. Системы дифференциальных уравнений

§1. Основные определения

Системой обыкновенных дифференциальных уравнений *называется система n уравнений, которые связывают независимую переменную x, n искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их производные до порядков $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно.*

$\Rightarrow$ Общий вид системы ОДУ:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ F_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где x – независимая переменная, $y_i(x)$ – искомые функции, $F_i(x)$ – известные функции.

Краткая запись системы (1):

$$F_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Замечание. Всегда будем предполагать, что число уравнений в систему ОДУ равно числу неизвестны функций.

Системы ОДУ, в которых число уравнений меньше числа неизвестных функций, называются уравнениями Монжа.

Совокупность n функций

$$y_1 = y_1(x)\,,\quad y_2 = y_2(x)\,,\quad \ldots,\quad y_n = y_n(x)$$

называется ***решением системы*** (1) *на интервале* (a;b), *если она обращает на* (a;b) *каждое уравнение этой системы в тождество.*

Система ДУ, которая может быть разрешена относительно старших производных всех входящих в нее функций, называется ***канонической*****.**

$\Rightarrow$ Общий вид канонической системы ДУ:

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \\ y_2^{(m_2)} = f_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(m_n)} = f_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \end{cases} \quad (2)$$

где x – независимая переменная, $y_i(x)$ – искомые функции, $f_i(x)$ – известные функции.

Краткая запись системы (2):

$$y_i^{(m_i)} = f_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)})$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Частный случай канонической системы – *система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной всех искомых функций, т. е. система вида:*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) *называется* ***нормальной*****.**

Если известные функции f_i системы (3) не зависят от свободной переменной x, то она называется ***автономной*** (***стационарной***).

Число уравнений нормальной системы (3) называется ее ***порядком***.

В дальнейшем будем рассматривать только нормальные системы, т.к. любую каноническую систему (2) всегда можно заменить эквивалентной ей нормальной системой из $k = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ уравнений.

Для этого достаточно ввести k новых функций

$$y_{i0},\ y_{i1},\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{i\,m_i-1} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

полагая, что

$$y_{i0} = y_i,\quad y_{i1} = y_i',\quad y_{i2} = y_i'',\quad \ldots,\quad y_{i\,m_i-1} = y_i^{(m_i-1)}$$

$$(i = 1,2,\ldots,n).$$

ПРИМЕР. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} y_1'' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'), \\ y_2'' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'), \\ y_3'' = f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'). \end{cases}$$

Введем новые функции

$$y_{10} = y_1, \qquad y_{20} = y_2, \qquad y_{30} = y_3,$$
$$y_{11} = y_1', \qquad y_{21} = y_2', \qquad y_{31} = y_3'.$$

Исходная система будет эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} y_{11}' = f_1(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{21}' = f_2(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{31}' = f_3(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{10}' = y_{11}, \\ y_{20}' = y_{21}, \\ y_{30}' = y_{31}. \end{cases}$$

Рассмотрим ДУ $y' = f(x, y)$.

ДУ 1-го порядка – частный случай системы ДУ (тривиальный случай).

Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения $y' = f(x, y)$.

С геометрической точки зрения $y = \varphi(x)$ – кривая на плоскости (в двумерном пространстве xOy).

Рассмотрим систему $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases}$

Пусть $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$ – ее решение.

С геометрической точки зрения $\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x), \\ y_2 = \varphi_2(x), \end{cases}$ – кривая в пространстве (в трехмерном пространстве Oxy_1y_2).

Обобщая геометрическую терминологию, будем считать, что *решение системы* (3)

$$y_1 = \varphi_1(x)\,,\quad y_2 = \varphi_2(x)\,,\quad \ldots,\quad y_n = \varphi_n(x)$$

представляет собой интегральную кривую $(n + 1)$*-мерного пространства переменных* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Любая система ДУ имеет множество решений.

Для выбора одного решения задают ***начальные условия*:**

$$y_1(x_0) = y_{10}\,,\quad y_2(x_0) = y_{20}\,,\quad \ldots,\quad y_n(x_0) = y_{n0}\,. \tag{4}$$

Задача нахождения решения системы ДУ, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши***.

ТЕОРЕМА 1 (о существовании и единственности решения задачи Коши).

Пусть в системе (3) *функции* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *удовлетворяют двум условиям*:

1) *функции* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *непрерывны как функции* $(n + 1)$*-ой переменной* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *в некоторой области* D $(n + 1)$*-мерного пространства*;
2) *их частные производные по переменным* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *в области* D *ограничены*.

Тогда для любой фиксированной точки $M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ *области* D *существует, и притом единственное, решение*

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы (3), *определенное в некоторой окрестности точки* x_0, *и удовлетворяющее начальным условиям* (4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Совокупность n функций*

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{array}\right\} \qquad (5)$$

зависящих от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *называется* ***общим решение системы*** (3), *если:*

1) *при любых допустимых значениях постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *она обращает все уравнения системы* (3) *в тождество, т. е. определяет решение системы;*

2) *для любых допустимых начальных условий найдутся такие значения констант* $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$, *при которых функции совокупности* (5) *удовлетворяют заданным начальным условиям, т.е.*

$$\varphi_1(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n) = y_{10}, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n) = y_{n0}.$$

Любое решение, которое получается из общего при конкретных постоянных C_i, будем называть ***частным***.

§2. Метод исключения

ТЕОРЕМА 1. *Любое дифференциальное уравнение n-го порядка*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

может быть заменено эквивалентной ему нормальной системой порядка n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Справедливо также и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Всякая нормальная система n-го порядка может быть заменена эквивалентным ей дифференциальным уравнением порядка n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения ее к одному уравнению порядка n, называется ***методом исключения***.

Замечание. Уравнение порядка n в теореме 2 было получено в предположении, что y_2 , y_3 , …, y_n можно выразить как функции $x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$.

Но в ряде случаев это сделать невозможно (например, если первое уравнение имеет вид $y_1' = f(x, y_1)$).

Тогда следует заменить систему уравнением порядка n относительно функции y_i $(i \neq 1)$.

Для системы ДУ нельзя получить эквивалентного ей уравнения порядка n только тогда, когда система распадается на отдельные уравнения, т.е. является не системой, а совокупностью уравнений.