Раздел: Теория вероятностей и математическая статистика

Тема: ***Проверка статистических гипотез***

Лектор Пахомова Е.Г.

2015 г.

§17. Понятие статистической гипотезы и связанные с ней понятия

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения.

НАПРИМЕР:

1) Генеральная совокупность распределена по закону Пуассона.
2) Математическое ожидание генеральной совокупности равно 100.
3) Дисперсии двух генеральных совокупностей равны.
4) На Марсе есть жизнь – не статистическая гипотеза

Проверяемую гипотезу называют ***нулевой (основной)***, обозначают её H_0.

Наряду с выдвинутой гипотезой H_0 рассматривают и противоречащую ей гипотезу, которую называют ***конкурирующей (альтернативной)*** и обозначают H_1.

НАПРИМЕР.

Пусть известно, что генеральная совокупность распределена по показательному закону:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$$

где λ – неизвестный параметр распределения.

Полагаем H_0: $\lambda = 10$

Тогда: H_1: $\lambda > 10$ или H_1: $\lambda < 10$

H_1: $\lambda \neq 10$ или H_1: $\lambda = 20$

В зависимости от выборочных данных принимается либо основная гипотеза, либо конкурирующая.

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	Ошибка 1-го рода
Неверна	Ошибка 2-го рода	Правильное решение

Обозначим: α – вероятность допустить ошибку 1-го рода,
β – вероятность допустить ошибку 2-го рода.

Вероятность α допустить ошибку 1-го рода, т.е. отвергнуть верную гипотезу H_0, называют ***уровнем значимости***.

Уровень значимости принимают обычно 0,05 или 0,01, но может быть и меньше (в зависимости от тяжести последствий ошибки).

§18. Общая схема проверки статистических гипотез

1) Задаём уровень значимости α.

2) Задаем случайную величину K, называемую ***статистическим критерием***, для которой выполняются следующие условия:

а) она является функцией от выборочных данных, т.е

$$K=K(x_1,x_2,\ldots,x_n);$$

б) её значения позволяют судить о «расхождении выборки с гипотезой H_0», т.е. о том, надо принимать или отвергать гипотезу H_0;

в) распределение этой величины известно.

Статистический критерий – свой для каждого вида гипотез (описаны в литературе).

3) Вычисляем значения критерия, подставляя в него выборочные данные.

Это число называют ***наблюдаемым значением критерия*** и обозначают $K_{набл}$.

4) Находим ***критическую область*** данного критерия, т.е. совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

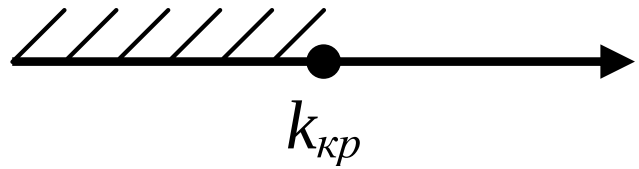
Все остальные значения критерия образуют область, называемую ***областью принятия гипотезы***.

Если наблюдаемое значение критерия попадает в критическую область, то гипотезу отвергаем, если в область принятия гипотезы, то принимаем

Точки, которые отделяют критическую область от области принятия гипотезы, называют ***критическими точками***.

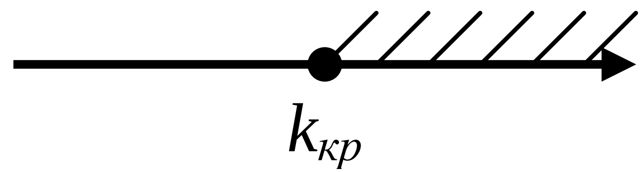
Виды критических областей:

а) левосторонняя



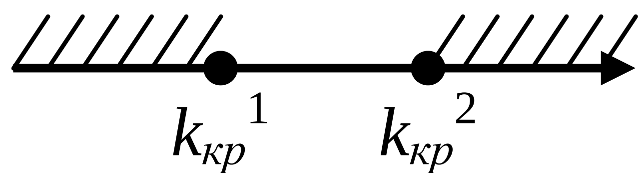
$K < k_{кр}$

б) правосторонняя



$K > k_{кр}$

в) двусторонняя



$K < k_{кр}^{1}$

$K > k_{кр}^{2}$

Критическую область W целесообразно находить согласно следующим требованиям:

а) $p(K \in W) = \alpha$;

б) вероятность β ошибки 2-го рода – минимальная,

$\Rightarrow$ вероятность $(1 - \beta)$ – максимальная.

Вероятность $(1 - \beta)$ не допустить ошибку 2-го рода (т.е. отвергнуть гипотезу H_0, когда она неверна), называется ***мощностью*** критерия.

Вид критической области зависит от вида конкурирующей гипотезы.

Критические точки определяются по специальным таблицам

Таким образом, схема проверки гипотезы:

1 этап

Задаём уровень значимости α.

2 этап

Записываем статистический критерий.

3 этап

Вычисляем наблюдаемое значение критерия.

4 этап

Находим критическую область и проверяем, попадает ли в неё наблюдаемое значение критерия.

§19. Сравнение выборочной средней с математическим ожиданием нормального распределения

Пусть генеральная совокупность распределена нормально.

Параметры распределения a, σ – неизвестны.

Проверить гипотезу: H_0: $a = a_0$, где a_0 – некоторое число.

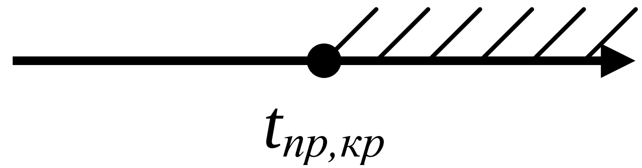
Критерий Стьюдента (t-критерий): $\mathbf{T} = \dfrac{(\overline{\mathbf{X}} - a)\sqrt{n}}{s}$

СВ **T** имеет распределение Стьюдента с k = n – 1 степенями свободы .

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

1. $H_1 : a > a_0$

Критическая область W – правосторонняя:



Из требования 1 для критической области:

$$p(T \in W) = \alpha \quad \Rightarrow \quad p(T > t_{пр,кр}) = \alpha$$

$$p(T < t_{пр,кр}) = 1 - p(T > t_{пр,кр}) = 1 - \alpha$$

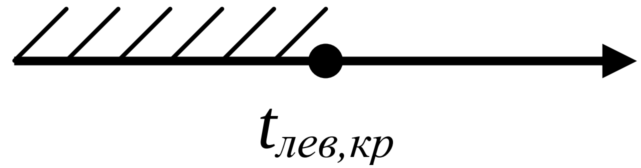
$$p(T < t_{пр,кр}) = F(t_{пр,кр})$$

где $F(x;k)$ – функция распределения Стьюдента с $k = n – 1$ степенями свободы

$$\boxed{\Rightarrow \quad F(t_{пр,кр}; k) = 1 - \alpha}$$

2. $H_1 : a < a_0$

Критическая область W – левосторонняя:



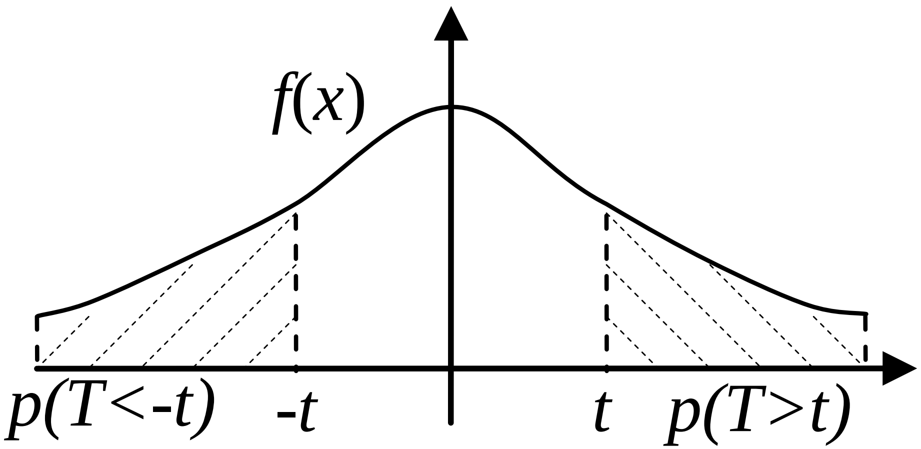
Из требования 1 для критической области:

$$p(T \in W) = \alpha \quad \Rightarrow \quad p(T < t_{лев,кр}) = \alpha$$

$$p(T < t_{лев,кр}) = \boxed{F(t_{лев,кр}; k) = \alpha}$$

где $F(x;k)$ – функция распределения Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы

Плотность распределения Стьюдента – чётная функция



$$\Rightarrow \quad p(T > t) = p(T < -t)$$

Критическая точка $t_{пр,кр}$ находится из требования:

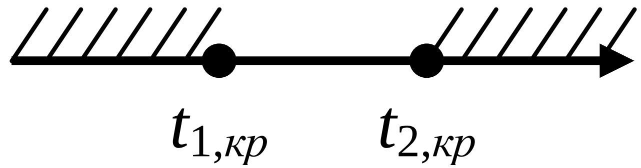
$$p(T > t_{пр,кр}) = \alpha \quad \Rightarrow \quad p(T < -t_{пр,кр}) = \alpha \quad \Rightarrow$$

$-t_{пр,кр}$ является критической точкой для левосторонней области:

$$t_{лев,кр} = -t_{пр,кр}$$

3. $H_1 : a \neq a_0$

Критическая область W – двусторонняя:



Пусть $\quad p(T < t_{1,кр}) = p(T > t_{2,кр}) = \alpha / 2$

В силу чётности плотности распределения Стьюдента:

$$t_{1,кр} = -t_{2,кр}$$

Аналогично пунктам **1** и **2** получаем:

$$F(t_{2,кр}; k) = (1-\alpha)/2, \qquad t_{1,кр} = -t_{2,кр}$$

или

$$F(t_{1,кр}; k) = \alpha/2, \qquad t_{2,кр} = -t_{1,кр}$$

Пример.

Проектный контролируемый размер изделий, изготовляемых станком-автоматом, a = 35 *мм*. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

x_i	34.8	34.9	35.0	35.1	35.3
n_i	2	3	4	6	5

Требуется при уровне значимости 0.05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a = 35$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 35$.

x_i	34.8	34.9	35.0	35.1	35.3
n_i	2	3	4	6	5

$n = 20$

$\alpha = 0.05$

H_0: $a = 35$ H_1: $a \neq 35$ $a_0 = 35$

$$T = \frac{\bar{x} - a_0}{s} \cdot \sqrt{n}$$

$\bar{x}$ – выборочная средняя

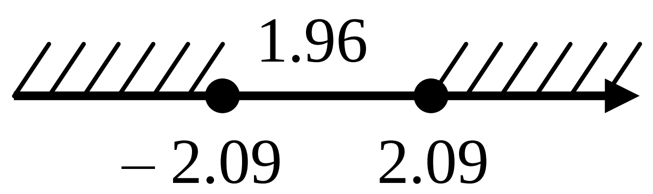
s – исправленное среднее квадратическое отклонение

$\bar{x} = 35.07$

$s = 0.16$

$$T_{набл} = \frac{35.07 - 35}{0.16} \cdot \sqrt{20} \approx 1.96$$

Критическая область двусторонняя:



Принимаем нулевую гипотезу, то есть станок обеспечивает проектный размер изделий.

§20. Проверка гипотезы о предполагаемом законе распределения

Осуществляется по той же схеме, что и проверка гипотезы о параметрах распределения.

Критерии, с помощью которых проверяется гипотеза о теоретическом законе распределения, называются ***критериями согласия***.

H_0: генеральная совокупность имеет некоторое определённое распределение

(т.е высказано предположение о <u>виде</u> и <u>параметрах</u> распределения)

Например:

1) Распределение является нормальным с математическим ожиданием, равным 5 и дисперсией, равной 4.
2) СВ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 5$.

Критерий Пирсона (χ^2-критерий)

Найдём ***теоретические частоты*** вариант.

1. Распределение дискретное $\Rightarrow$ $p(x)$.

x_i	x_1	x_2	…	x_{l-1}	x_l
p_i	$p_1=p(x_1)$	$p_2=p(x_2)$	…	$p_{l-1}=p(x_{l-1})$	$p_l=1-p_1-p_2-\ldots-p_{l-1}$

Теоретическая частота появления варианты x_i – это np_i.

2. Распределение непрерывное $\Rightarrow$ $F(x)$.

x_i	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	…	(x_{l-1}, x_l)	(x_l, x_{l+1})
p_i	$p_1=p(X< x_2)$ $=F(x_2)$	$p_2=p(x_2<X<x_3)$ $=F(x_3)- F(x_2)$	…	$p_{l-1}=p(x_{l-1}<X<x_l)$ $=F(x_l)- F(x_{l-1})$	$p_l=1-p_1-p_2-$ $\ldots-p_{l-1}$

Теоретическая частота попадания в интервал (x_i, x_{i+1}) – это np_i.

Критерий:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

n_i – эмпирические частоты

np_i – теоретические частоты

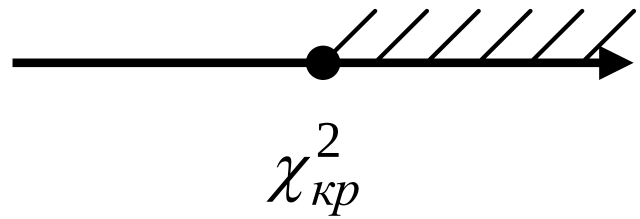
При $n \to \infty$ случайная величина χ^2 имеет распределение Пирсона с k степенями свободы, где

$$k = l - 1 - r,$$

l – число вариант (интервалов),

r – число параметров предполагаемого распределения, оцениваемых по выборке

Критическая область W – правосторонняя:



Из требования 1 для критической области:

$$p(\chi^2 \in W) = \alpha \quad \Rightarrow \quad p(\chi^2 > \chi^2_{кр}) = \alpha$$

$$p(\chi^2 < \chi^2_{кр}) = 1 - p(\chi^2 > \chi^2_{кр}) = 1 - \alpha$$

$p(\chi^2 < \chi^2_{кр}) = F(\chi^2_{кр})$, $F(x)$ – функция распределения χ^2

$$\Rightarrow \quad F(\chi^2_{\hat{e}\eth}) = 1 - \alpha$$

$F(x)$ – функция распределения Пирсона с $k=l-1-r$ степенями свободы, l – число вариант (интервалов), r – число параметров, оцениваемых по выборке.

ПРИМЕР.

На экзамене по некоторому предмету, преподаватель задает студенту только один вопрос по одной из 4-х частей курса.

Из 100 студентов 26 получили вопрос по 1-й части,

32 – по 2-й,

17 – по третьей,

остальные – по четвертой.

Согласуется ли с этими результатами гипотеза о том, что для пришедшего на экзамен имеется одинаковая вероятность получить вопрос по любой части курса. Уровень значимости принять $\alpha = 0{,}05$

Статистический ряд:

x_i	1	2	3	4
n_i	26	32	17	25

Теоретическое распределение:

x_i	1	2	3	4
n_i^*	25	25	25	25

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i} =$$

$$= \frac{(26-25)^2}{25} + \frac{(32-25)^2}{25} + \frac{(17-25)^2}{25} + \frac{(25-25)^2}{25} =$$

$$= \frac{1+49+64}{25} = \frac{114}{25} = 4{,}56$$

Число степеней свободы: $k = 4–1 = 3$

Критическая точка χ^2 для при $\alpha = 0,05$ и $k = 3$:

$$\chi^2_{кр}(0,05;\ 3) = 7,82$$

Так как 4,56 < 7,82, то оснований отвергать гипотезу о биномиальном распределении нет.