

Раздел: Теория вероятностей и математическая
статистика

Тема: *Законы распределения случайных
величин*

Лектор Пахомова Е.Г.

2015 г.

§9. Законы распределения случайных величин

Есть законы распределения, которые встречаются на практике значительно чаще других.

Таковыми законами распределения являются:

Для ДСВ: 1) биномиальный закон распределения;
2) распределение Пуассона.

Для НСВ: 1) равномерное распределение;
2) показательное распределение;
3) нормальное распределение.

1. Биномиальный закон распределения (распределение Бернулли)

Пусть ДСВ X принимает значения $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что ДСВ X имеет **биномиальное распределение**, если $P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где $p+q = 1$.

\Rightarrow СВ, распределенная по биномиальному закону, может появиться только в результате серии испытаний, проходящих по схеме Бернулли, причем при небольших n .

Числовые характеристики СВ X , имеющей биномиальное распределение:

- 1) $M[X] = np$;
- 2) $D[X] = npq$.

2. Распределение Пуассона

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что ДСВ X имеет **распределение Пуассона**, если

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

где $\lambda = n \cdot p$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Числовые характеристики СВ X , имеющей распределение Пуассона:

1) $M[X] = \lambda$;

2) $D[X] = \lambda$.

Замечание. Распределение Пуассона используется вместо биномиального распределения для случая, когда

1) число n независимых испытаний в схеме Бернулли велико, а вероятность p появления события – мала ($p < 0,1$).

2) $np \approx npq$ (т.е. $D[X_{\text{Пуассона}}] \approx D[X_{\text{бином.}}]$)

3. Равномерное распределение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. НСВ X называется **равномерно распределенной на отрезке $[a; b]$** , если ее плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b]; \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Основные характеристики равномерного распределения:

1) Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

2) Вероятность попадания в интервал $[\alpha; \beta] \in [a; b]$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

3) Числовые характеристики СВ X , имеющей равномерное распределение:

а) $M[X] = \frac{b + a}{2};$

б) $D[X] = \frac{(b - a)^2}{12}.$

4. Показательное распределение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. НСВ X называется *распределенной по показательному закону*, если ее плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Число λ называется *параметром* показательного распределения.

Основные характеристики равномерного распределения:

1) Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0. \end{cases}$$

2) Вероятность попадания в интервал $[\alpha; \beta] \in [0; +\infty]$:

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\alpha\lambda} - e^{-\beta\lambda}$$

3) Числовые характеристики СВ X , имеющей показательное распределение:

а) $M[X] = \frac{1}{\lambda}$ – вероятностный смысл параметра λ ;

б) $D[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.

5. Нормальное распределение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что НСВ X имеет **нормальное распределение** (**распределение Гаусса**), если ее плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Числа a и σ называется **параметрами нормального распределения**.

Исследование функции $f(x)$:

1. $D(f) = \mathbb{R}$.

2. $f(x) > 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

\Rightarrow ось Ox – горизонтальная асимптота графика функции.

4. Функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
5. График $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$.
6. Нормальная кривая в точках $x = a \pm \sigma$ имеет перегиб,

$$f(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$

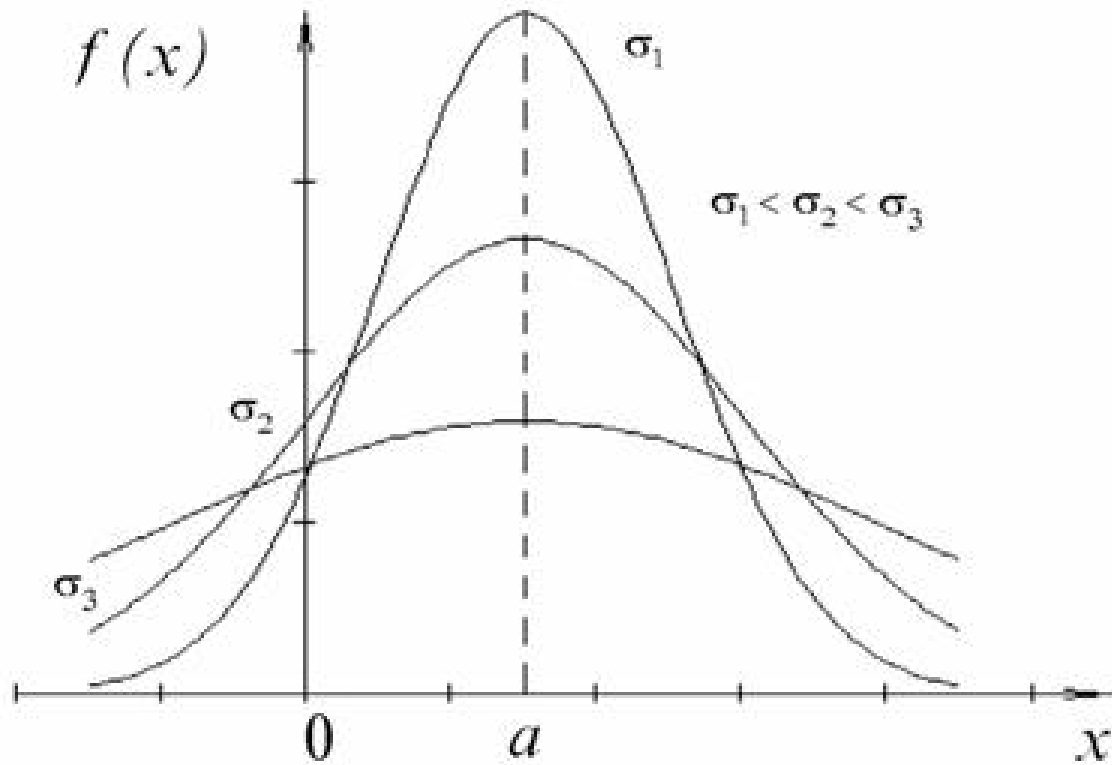


График функции $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ называют **нормальной кривой (кривой Гаусса)**

Частный случай: $a = 0$, $\sigma = 1$ – нормированная функция Гаусса.

СВ, распределенная по нормальному закону с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$, называется **стандартной нормальной СВ**.

Основные характеристики равномерного распределения:

1) Функция распределения: $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$,

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

2) Вероятность попадания в интервал $(\alpha; \beta)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

3) Числовые характеристики СВ X , имеющей равномерное распределение:

а) $M[X] = a$;

б) $D[X] = \sigma^2$.

$$\Rightarrow \sigma_x = \sigma .$$

Таким образом, нормальный закон полностью определен математическим ожиданием и дисперсией.

4) Правило «трех сигм»:

Вероятностью отклонения нормально распределенной СВ от ее МО на величину, большую 3σ , можно пренебречь.

Действительно,

$$P(|X - M[x]| \leq 3\sigma_x) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0,49865 = 0,9973$$