Математический анализ
Раздел: вариационное исчисление

Тема: ***Второе определение вариации функционала. Необходимое условие экстремума функционала.***

Простейшая задача вариационного исчисления

Лектор Пахомова Е.Г.

2014 г.

2. Второе определение вариации функционала

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Вариацией функционала $J[y(x)]$ для $y(x)$ называется значение производной функционала $J[y(x) + t\delta y(x)]$ по параметру t, при $t = 0$:

$$\delta J[y,\delta y] = \frac{d}{dt}\left(J[y(x)+t\delta y(x)]\right)\Big|_{t=0}.$$

ТЕОРЕМА 3.

Если существует δJ в смысле определения 1, то существует δJ в смысле определения 2, и они совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

***Замечание*.**

Определение 2 вариации функционала несколько шире определения 1.

Существуют функционалы, из приращения которых нельзя выделить линейной части, но их вариация в смысле определения 2 существует.

§5. Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума

Пусть $J[y]$ – функционал, $J[y]\colon C_1[a;b] \to \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1) Говорят, что $J[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ ***слабого относительного максимума*** (***минимума***), если существует $U_1(y_0(x),\varepsilon)$ такая, что

$$J[y(x)] \le J[y_0(x)] \quad (J[y(x)] \ge J[y_0(x)]),\ \ \forall y(x) \in U_1(y_0(x),\varepsilon).$$

2) Говорят, что $J[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ ***сильного относительного максимума*** (***минимума***), если существует $U_0(y_0(x),\varepsilon)$ такая, что

$$J[y(x)] \le J[y_0(x)] \quad (J[y(x)] \ge J[y_0(x)]),\ \ \forall y(x) \in U_0(y_0(x),\varepsilon).$$

Относительные максимумы и минимумы (слабые и сильные) называются ***относительными экстремумами***.

3) Говорят, что $J[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ ***абсолютного максимума*** (***минимума***), если

$$J[y(x)] \le J[y_0(x)] \quad (J[y(x)] \ge J[y_0(x)], \ \forall y(x) \in C_1[a;b].$$

Абсолютный максимум и минимум называются ***абсолютными экстремумами***.

Если на кривой $y = y_0(x)$ $J[y]$ достигает экстремума (абсолютного, относительного) и равенство

$$J[y(x)] = J[y_0(x)]$$

справедливо только при $y(x) = y_0(x)$, то экстремум называют ***строгим***.

Справедливы утверждения:

1) Любой сильный экстремум является в то же время и слабым экстремумом. Обратное не верно.

2) Любой абсолютный экстремум является слабым и сильным относительным экстремумом, но не всякий относительный экстремум будет абсолютным.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие экстремума функционала).

Пусть функционал $J[y]$ достигает экстремума при $y = y_0(x)$ и для этой функции существует вариация $\delta J[y_0, \delta y]$. Тогда

$$\delta J[y_0, \delta y] = 0, \ \forall \delta y$$

(при условии, что $y_0 + \delta y \in M$)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

§6. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

Пусть $F(x, y, y')$ – функция, имеющая непрерывные частные производные по x, y, y' до второго порядка включительно.

Среди всех функций $y(x) \in C_1[a;b]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$ найти ту функцию, на которой достигает слабого экстремума функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx. \qquad (1)$$

Сформулированная задача называется ***простейшей задачей вариационного исчисления***.

ЛЕММА 1 (основная лемма вариационного исчисления).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и

$$\int_a^b f(x)\cdot h(x)dx = 0, \quad \forall h(x)\in C[a;b],$$

то $f(x)\equiv 0$.

Замечание. Доказанная лемма останется справедливой и в том случае, когда $h(x)\in C_k[a;b]$ и удовлетворяет некоторым граничным условиям (например, $h(a) = h(b) = 0$).

Т.е. лемма справедлива если соотношение $\int_a^b f(x)\cdot h(x)dx = 0$ имеет место для более узкого класса функций, чем указано в условии леммы.

ТЕОРЕМА 2.

Пусть M – множество непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = A,\ \ y(b) = B.$$

Для того, чтобы определенный на M функционал (1) достигал на данной функции $y_0(x)$ слабого экстремума необходимо, чтобы $y_0(x)$ удовлетворяла условию

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется ***уравнением Эйлера***.

Замечание. Т.к. любой сильный экстремум является в то же время и слабым, то любое условие, необходимое для слабого экстремума, необходимо и для сильного.

Уравнение Эйлера можно записать в виде:

$$F'_y - F''_{y'x} - F''_{y'y} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0. \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ уравнение Эйлера является дифференциальным уравнением 2-го порядка. Интегральные кривые уравнения Эйлера называются ***экстремалями*** (***лагранжевыми кривыми***).

Простейшие случаи уравнения Эйлера

1) F не зависит от y, т.е. $F = F(x, y')$.

Тогда уравнение Эйлера примет вид: $F'_{y'} = C$.

2) F не зависит от x, т.е. $F = F(y, y')$.

Тогда уравнение Эйлера примет вид: $F - y' \cdot F'_{y'} = C$.

3) F не зависит от , т.е. $F = F(x\,, y)$.

Тогда уравнение Эйлера примет вид: $F'_y(x, y) = 0.$ (4)

Уравнение (4) не является дифференциальным уравнением.
$\Rightarrow$ его решение не содержит произвольных элементов.
$\Rightarrow$ кривая, на которой может достигаться экстремум, существует только в том случае, когда решение уравнения (4) удовлетворяет граничным условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$.

4) F не зависит от x и y, т.е. $F = F(y')$.

Тогда уравнение Эйлера примет вид: $y'' \cdot F''_{y'y'} = 0.$

$\Rightarrow y'' = 0$,

$\Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2.$

5) F не зависит от x и y', т.е. $F = F(y)$.

Тогда уравнение Эйлера примет вид: $F'_y(y) = 0.$ (5)

Уравнение (5) не является дифференциальным уравнением.

$\Rightarrow$ его решение не содержит произвольных элементов.

$\Rightarrow$ кривая, на которой может достигаться экстремум, существует только в том случае, когда решение уравнения (5) удовлетворяет граничным условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$. (ср. с (3))

6) F зависит от y' линейно, т.е. $F = M(x,y) + N(x,y) \cdot y'$.

Тогда уравнение Эйлера примет вид:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \qquad (6)$$

Уравнение (6) не является дифференциальным уравнением.

$\Rightarrow$ Также как и в случаях 3) и 5) экстремаль будет существовать только в том случае, когда решение уравнения (6) удовлетворяет граничным условиям.

Если же в некоторой области $D \subset xOy$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0,$$

то значение функционала постоянно на любой кривой.

$\Rightarrow$ вариационная задача теряет смысл.