

Домашнее задание по теме: «Краевые задачи»

1) $yy'' + (y')^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$

Ответ: $y = \pm\sqrt{C_1 - (x + C_2)^2}, \quad y = \sqrt{5 - (x - 2)^2}.$

2) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \cos 2x,$
 $y(0) = y(\pi) = \frac{1}{25}, \quad y'(0) = \frac{2}{15}, \quad y'(\pi) = \frac{2}{25}$

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{4}{75} \sin 2x + \frac{1}{25} \cos 2x,$
 $y = \frac{2}{75} \sin x + \frac{4}{75} \sin 2x + \frac{1}{25} \cos 2x.$

3) $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$

Ответ: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}, \quad y = e^{-x}.$

Найти собственные значения и собственные функции краевых задач

4) $4y'' + 8y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(2) = 0.$

Ответ: λ_k – решения уравнения $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda - 4} = 0,5 \sqrt{\lambda - 4} \quad (\lambda_k \neq 4),$

$$y_k = C e^{-x} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_k - 4}}{2} x\right).$$

5) $y'' + 4y' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(1) = 0.$

Ответ: $\lambda_k = 4 + (\pi k)^2, \quad y_k = C e^{-2x} \left[\cos \pi k x + \frac{2}{\pi k} \sin \pi k x \right], \quad k \in \mathbb{N};$

$$\lambda_0 = 0, \quad y_0 = C.$$