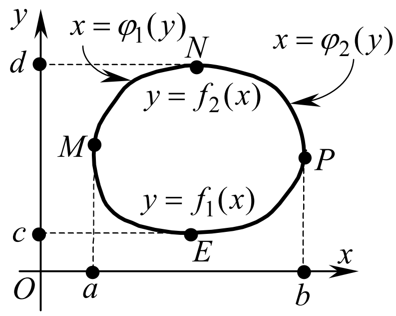
Геометрическое приложение криволинейного интеграла II рода

Пусть (σ) *– квадрируемая область в плоскости* xOy, (ℓ) *– кусочно-гладкая замкнутая кривая, ограничивающая область* (σ). *Тогда площадь* σ *области* (σ) *может быть найдена по формуле*

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \oint\limits_{(\ell)} x dy - y dx .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Предположим, что (σ) правильная в обоих направлениях, ограниченная кривыми



$$y = f_2(x), \qquad y = f_1(x)$$

$$(f_1(x) \le f_2(x), \ a \le x \le b),$$

или

$$x = \varphi_2(y), \qquad x = \varphi_1(y)$$

$$(\varphi_1(y) \le \varphi_2(y), \ c \le y \le d).$$

Тогда площадь области (σ) равна

$$\sigma = \int\limits_a^b f_2(x) dx - \int\limits_a^b f_1(x) dx = \int\limits_{(MNP)} y dx - \int\limits_{(MEP)} y dx = \int\limits_{(MNP)} y dx + \int\limits_{(PEM)} y dx =$$

$$= \oint\limits_{-(\ell)} y dx = - \oint\limits_{(\ell)} y dx . \tag{1}$$

Аналогично получаем

$$\sigma = \int\limits_c^d \varphi_2(y) dy - \int\limits_c^d \varphi_1(y) dy = \int\limits_{(EPN)} x dy - \int\limits_{(EMN)} x dy = \int\limits_{(EPN)} x dy + \int\limits_{(NME)} x dy =$$

$$= \oint\limits_{(\ell)} x dy . \tag{2}$$

Суммируем равенства (1) и (2). Получаем:

$$2 \cdot \sigma = \oint\limits_{(\ell)} x dy - \oint\limits_{(\ell)} y dx$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{2} \cdot \oint\limits_{(\ell)} x dy - y dx .$$

Замечание. Формула была выведена для площади, правильной в обоих направлениях. Но она останется справедливой для любой области, так как любую область можно разбить на правильные участки, а интегралы по дополнительным линиям будут взаимно уничтожаться.