§1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексные числа представляют собой расширение множества действительных чисел. Впервые с необходимостью их введения математики столкнулись при изучении кубических уравнений. В XVI в. была получена общая формула для решения кубических уравнений вида $x^3 + px + q = 0$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ .$$

(формула Кардано). Но оказалось, что если указанное уравнение имеет три действительных корня, то выражение $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ будет отрицательным. Следовательно, чтобы найти корни уравнения в этом случае необходимо выполнить действия с числом вида $a \pm \sqrt{D}$ (где $D < 0$), или, что то же, с числом вида $a \pm b\sqrt{-1}$. Такие выражения получили название комплексных чисел и в дальнейшем стали широко применяться во многих разделах математики и ее приложениях.

1. Определение и различные формы записи комплексного числа

1) Определение комплексного числа.

Пусть символ i обозначает число, квадрат которого равен -1, т.е.

$$i^2 = -1\ .$$

Символ i называют ***мнимой единицей***. Выражение вида $z = a + bi$, где a, b – действительные числа, называют ***комплексным числом***. При этом, a называют ***действительной частью*** числа z, b – его ***мнимой частью***. Действительную и мнимую части числа z обозначают обычно $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ соответственно, т.е. $a = \operatorname{Re} z$ и $b = \operatorname{Im} z$.

Комплексное число вида $0 + bi$ (где $b \neq 0$) принято называть ***чисто мнимым*** и записывать в виде bi. Комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ (т.е. числа, которые отличаются только знаком мнимой части), называют ***комплексно сопряженными.*** Если одно из этих чисел обозначено через z, то другое принято обозначать $\bar{z}$.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Комплексные числа z_1 и z_2 называются ***равными*** (записывают: $z_1 = z_2$), если соответственно равны их действительные и мнимые части, т.е. если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. При этом полагают, что $1i = i$ и $a + 0i = a$.

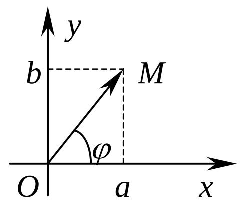
Последнее равенство позволяет рассматривать действительные числа как подмножество множества комплексных чисел.

2) Геометрическая форма записи комплексных чисел.

Всякое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить на плоскости xOy в виде точки $M(a,b)$. Причем соответствие между комплексными числами и точками плоскости xOy будет взаимно однозначным. Плоскость, на которой реализовано такое соответствие, называют ***комплексной плоскостью***. Ось Ox комплексной плоскости называют ***действительной осью***, так как точкам оси Ox соответствуют действительные числа. Точки, лежащие на оси Oy, изображают чисто мнимые числа. Поэтому ось Oy комплексной плоскости называют ***мнимой осью***.

Расстояние от точки $M(a,b)$ комплексной плоскости до начала координат O, называют ***модулем*** комплексного числа $z = a + bi$ и обозначают $|z|$. Очевидно, что $|z| \ge 0$ и $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Величину φ угла между вектором $\overline{OM} \ne \overline{0}$ и действительной осью Ox называют ***аргументом*** комплексного числа (при этом φ берут со знаком «плюс» если поворот от оси Ox к вектору $\overline{OM}$ осуществляется против часовой стрелки, и со знаком «минус» – в противном случае). Очевидно, что аргумент данного комплексного числа z $(z \ne 0)$ определен неоднозначно, причем любые два значения аргумента отличаются на величину, кратную 2π. Множество значений аргумента числа z обозначают $\operatorname{Arg} z$; значение аргумента, принадлежащее промежутку $(-\pi; \pi]$, обозначают $\arg z$ и называют ***главным значением аргумента***. Для $z = 0$ аргумент не определен.



Пусть $z = a + bi \ne 0$, $|z| = r$, φ – аргумент z. Очевидно, что

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi.$$

Но тогда комплексное число $z = a + bi$ можно записать в виде

$$z = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1}$$

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ принято называть ***алгебраической формой*** записи комплексного числа, а запись в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – ***тригонометрической формой*** записи.

На практике нередко приходится переходить от одной формы записи комплексного числа к другой. Такой переход не представляет трудности. Действительно, если число z записано в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то его действительная часть a и мнимая часть b находятся по формулам:

$$\operatorname{Re} z = a = r\cos\varphi, \qquad \operatorname{Im} z = b = r\sin\varphi.$$

Если число z записано в виде $z = a + bi$, то его модуль r и аргумент φ находятся по формулам

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\,,\qquad \varphi=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{если } a>0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}+\pi, & \text{если } a<0\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } a=0,\ b>0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } a=0,\ b<0\end{cases}$$

ПРИМЕР. 1) Записать $z=-1+\sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме.

Находим модуль r и аргумент φ комплексного числа. Так как его действительная часть $a=-1$ и мнимая часть $b=\sqrt{3}$, то

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2 \quad \text{и} \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\pi=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

Следовательно, $$z=-1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

2) Записать число $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ в алгебраической форме.

Имеем: $$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-i\,.$$

2. Действия над комплексными числами

1) Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Складывая и вычитая выражения $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ как обычные многочлены, мы получим комплексные числа

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i \qquad \text{и} \qquad (a_1-a_2)+(b_1-b_2)i\,.$$

Их называют соответственно ***суммой*** и ***разностью*** чисел z_1 и z_2 (обозначают: z_1+z_2 и z_1-z_2). Аналогично, умножая z_1 и z_2 как обычные многочлены и учитывая, что $i^2=-1$, получим:

$$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i\,. \qquad (2)$$

Комплексное число в правой части формулы (2) называют ***произведением*** комплексных чисел z_1 и z_2 (обозначают: $z_1 z_2$). Произведение n комплексных чисел, равных z, называют n–й ***степенью*** числа z и обозначают z^n.

ПРИМЕР. Пусть $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4 - 3i$. Тогда

$$z_1 + z_2 = (1+2i) + (4-3i) = (1+4) + (2-3)i = 5 - i,$$

$$z_1 - z_2 = (1+2i) - (4-3i) = (1-4) + (2+3)i = -3 + 5i,$$

$$z_1 z_2 = (1+2i)\cdot(4-3i) = (1\cdot 4 - 2\cdot 3i^2) + (-3\cdot 1 + 2\cdot 4)i = (4+6) + 5i = 10 + 5i,$$

$$(z_1)^3 = (1+2i)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 \cdot 2i + 3\cdot 1\cdot (2i)^2 + (2i)^3 = (1-12) + (6-8)i = -11 - 2i.$$

Введенные выше операции сложения и умножения комплексных чисел обладают теми же свойствами, что сложение и умножение действительных чисел. А именно, легко убедиться в справедливости следующих равенств:
1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
3) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
4) $(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;
5) $(z_1 + z_2)\cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Замечание. Комплексному числу $z = a + bi$ мы поставили в соответствие точку комплексной плоскости $M(a,b)$. Но можно также ставить ему в соответствие и радиус-вектор $\overline{OM} = \{a,b\}$. Такое соответствие тоже является взаимно однозначным, причем в этом случае операции сложения и вычитания комплексных чисел естественны с геометрической точки зрения. Действительно, сумме $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ соответствует вектор $\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}$ (где $\overline{OM_1} = \{a_1, b_1\}$, $\overline{OM_2} = \{a_2, b_2\}$), а разности $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$ соответствует вектор $\{a_1 - a_2, b_1 - b_2\} = \overline{OM_1} - \overline{OM_2}$.

Операцию деления комплексных чисел вводят как обратную умножению: комплексное число z_3 называется ***частным*** чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ (обозначают: $\dfrac{z_1}{z_2}$), если $z_1 = z_3 \cdot z_2$.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ и $\dfrac{z_1}{z_2} = z_3 = x + yi$. Тогда

$$z_3 \cdot z_2 = (x + yi)\cdot(a_2 + b_2 i) = (xa_2 - yb_2) + (xb_2 + ya_2)i = a_1 + b_1 i.$$

Из уравнений $xa_2 - yb_2 = a_1$ и $xb_2 + ya_2 = b_1$

находим: $x = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2}$ и $y = \dfrac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2}$.

Таким образом,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2} i .$$

Замечание. Тот же результат формально получится, если числитель и знаменатель дроби $\dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ умножить на число, сопряженное знаменателю, т.е. на $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)\cdot(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2} i .$$

В практических вычислениях пользуются именно этим приемом.

ПРИМЕР. Пусть $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4 - 3i$. Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{4-3i} = \frac{(1+2i)\cdot(4+3i)}{(4-3i)\cdot(4+3i)} = \frac{(4-6)+(8+3)i}{16+9} = \frac{-2+11i}{25} = -\frac{2}{25} + \frac{11}{25} i .$$

2) Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Умножение и деление комплексных чисел проще выполнять, если они записаны в тригонометрической форме. Действительно, пусть комплексные числа z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) .$$

Перемножив их, получим:

$$z_1 \cdot z_2 = \left[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\right]\cdot\left[r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right] =$$

$$= r_1 r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right].$$

Откуда, используя формулы для косинуса и синуса суммы, находим:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] \qquad (3)$$

Итак, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы – складываются.

Формула (3) очевидно остается верной для любого конечного числа множителей. В частности, при возведении числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в степень n $(n = 2,3,4,\ldots)$ получим

$$z^n = r^n\left[\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right]. \qquad (4)$$

Формулу (4) называют ***формулой Муавра***.

Теперь разделим $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2)^2 + (\sin\varphi_2)^2}$$

Но $(\cos\varphi_2)^2 + (\sin\varphi_2)^2 = 1$. Следовательно,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)].$$

Откуда, используя формулы для косинуса и синуса разности, находим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \qquad (5)$$

Итак, при делении $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ получили комплексное число, модуль которого равен $\dfrac{r_1}{r_2}$, а аргумент – $\varphi_1 - \varphi_2$.

ПРИМЕР. Пусть $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Тогда $$z_1\cdot z_2 = 2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right),$$

$$(z_1)^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 32\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

3) Извлечение корня из комплексных чисел.

Пусть n – натуральное число. ***Корнем n–ой степени*** из комплексного числа z (обозначают: $\sqrt[n]{z}$) называют комплексное число w, такое, что $w^n = z$.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Тогда по определению и по формуле (5) получаем:

$$w^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда $$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Таким образом, все корни n–ой степени из комплексного числа $z \neq 0$ могут быть найдены по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (6)$$

где $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Замечание. Формально k в формуле (6) может принимать любое целое значение. Но угол $\psi_k = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ и угол $\psi_{k+n} = \dfrac{\varphi + 2\pi(k+n)}{n}$ различаются на величину 2π. Следовательно, при k и $k+n$ мы получим по формуле (6) одно и то же комплексное число. Таким образом, различных значений корня будет только n, и чтобы их найти достаточно взять в формуле (6) $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

НАПРИМЕР. Найти все значения $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}\,i}$.

Обозначим значения $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}\,i}$ через w_0, w_1, w_2, w_3. Чтобы найти w_0, w_1, w_2, w_3 необходимо сначала записать комплексное число $z = 1-\sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме. Имеем:

$$a = 1, \quad b = -\sqrt{3},$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3},$$

$$z = 1-\sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Теперь по формуле (9) находим

$$w_k = \sqrt[4]{1-\sqrt{3}\,i} = \sqrt[4]{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}\right),$$

где $k = 0,1,2,3$. Или, более подробно:

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right),$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right),$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right),$$

$$w_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right).$$