ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $f(n) \div F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot e^{-np}$.

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ: $f(n) = \dfrac{1}{2\pi i} \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} F^*(p) e^{np} dp$.

Если $F^*(p)$ – правильная рациональная дробь относительно e^p, то

$$f(n) = \sum_k \underset{p=p_k}{res} [F^*(p) \cdot e^{(n-1)p}], \quad \text{где} \ -\pi < \operatorname{Im} p_k \le \pi ;$$

$$\Rightarrow \quad f(n) = \sum_k \underset{z=z_k}{res} [F^*(z) \cdot z^{(n-1)}], \quad \text{где} \ z = e^p .$$

ТАБЛИЦА ИЗОБРАЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

1) $1 \div \dfrac{e^p}{e^p - 1}$

2) $e^{\alpha n} \div \dfrac{e^p}{e^p - e^\alpha}$

3) $\cos\omega n \div \dfrac{e^p(e^p - \cos\omega)}{e^{2p} - 2e^p \cos\omega + 1}$

4) $ch\omega n \div \dfrac{e^p(e^p - \operatorname{ch}\omega)}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch}\omega + 1}$

5) $\sin\omega n \div \dfrac{e^p \cdot \sin\omega}{e^{2p} - 2e^p \cos\omega + 1}$

6) $sh\omega n \div \dfrac{e^p \cdot \operatorname{sh}\omega}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch}\omega + 1}$

7) $n \div \dfrac{e^p}{(e^p - 1)^2}$

8) $n^2 \div \dfrac{e^{2p} + e^p}{(e^p - 1)^3}$

9) $n^3 \div \dfrac{3e^{3p} + 4e^{2p} + e^p}{(e^p - 1)^4}$

СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1) Линейность изображения: $\alpha\cdot f(n)+\beta\cdot g(n) \div \alpha\cdot F^*(p)+\beta\cdot G^*(p)$.

2) Теоремы опережения и запаздывания:

$$f(n+k) \div e^{kp}\cdot[F^*(p)-f(0)-f(1)e^{-p}-f(2)e^{-2p}-\ldots-f(k-1)e^{-(k-1)p}]$$

$$f(n-k) \div e^{-kp}\cdot F^*(p) \quad (f(n-k)\equiv 0 \text{ для } n<k)$$

3) Теорема смещения (затухания):

$$e^{\tau\cdot n}\cdot f(n) \div F^*(p-\tau)$$

4) Дифференцирование изображения:

$$[F^*(p)]' \div -n\cdot f(n),\quad [F^*(p)]'' \div n^2\cdot f(n),\quad \ldots.,\quad [F^*(p)]^{(k)} \div (-1)^k\cdot n^k\cdot f(t)$$

5) Интегрирования изображения:

Если $f(0)=0$ и $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(t)}{t}=0$, то $\qquad \dfrac{f(n)}{n} \div \displaystyle\int_p^\infty F^*(p)dp$

6) Дифференцирование по параметру:

Если $f(n,\varepsilon) \div F^*(p,\varepsilon)$, то $\qquad \dfrac{\partial f(n,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} \div \dfrac{\partial F^*(p,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}$

7) Интегрирование по параметру:

Если $f(n,\varepsilon) \div F^*(p,\varepsilon)$ $\qquad \displaystyle\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} f(n,\varepsilon)d\varepsilon \div \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} F^*(p,\varepsilon)d\varepsilon$

8) Умножение изображений:

$$F^*(p)\cdot G^*(p) \div \underbrace{\sum_{m=0}^{n} f(n-m)\cdot g(m)}_{f(n)*g(n)} = \sum_{m=0}^{n} f(n)\cdot g(n-m)$$

9) Изображение разностей:

$$\Delta f(n) \div (e^p-1)F^*(p)-e^p f(0)$$

$$\Delta^2 f(n) \div (e^p-1)^2F^*(p)-e^p(e^p-1)f(0)-e^p\Delta f(0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^k f(n) \div (e^p-1)^kF^*(p)-e^p\sum_{j=0}^{k-1}(e^p-1)^{k-j-1}\cdot\Delta^j f(0)$$

10) Изображение суммы:

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m) \div \frac{F^*(p)}{e^p-1}$$