

Домашнее задание по теме: «Разложение фкп в ряд Лорана»

Разложить функции в ряд Лорана в окрестности z_0 :

1. $\frac{z - \sin z}{z^3}, z_0 = 0;$

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n+3)!};$

2. $\frac{e^z}{z^3}, z_0 = 0;$

Ответ: $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+3)!};$

3. $\frac{1}{z} \cdot \sin^2 \frac{2}{z}, z_0 = 0;$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{4n-1}}{(2n)! \cdot z^{2n+1}};$

4. $z \cdot e^{\frac{1}{z+i}}, z_0 = -i.$

Ответ: $(z+i) + (1-i) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{i}{n!} \right) \frac{1}{(z+i)^n}.$

Разложить функции в ряд Лорана в указанных кольцах:

5. $\frac{1}{(z+2) \cdot (1+z^2)}, |z| < 1;$

Ответ: $\frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + 2 \sin \frac{n\pi}{2} + \cos \frac{n\pi}{2} \right) \cdot z^n;$

6. $\frac{2z+3}{z^2+3z+2}, 1 < |z| < 2;$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot z^n;$

7. $\frac{1}{z^2+2z-8}, 1 < |z+2| < 4;$

Ответ: не разлагается;

8. $\frac{z+2}{z^2-4z+3}, 2 < |z-1| < +\infty;$

Ответ: $\frac{1}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n-2}}{(z-1)^n};$

9. $\frac{z}{(z^2-4) \cdot (z^2-1)}, 1 < |z| < 2;$

Ответ: $-\frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{2^{2n-1}} - \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n-1}};$

10. $\frac{1}{(z^2-4)^2}, 4 < |z+2| < +\infty.$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{2n-2}}{(z+2)^{n+3}}.$