

Домашнее задание по теме: «Интеграл Фурье»

Записать интеграл Фурье функции $y = f(x)$ и найти его значение.

$$1) f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \in [-1;1]; \\ 0, & x \notin [-1;1]. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{2 \sin \omega}{\omega} \cos \omega x + \frac{4(\sin \omega - \omega \cos \omega)}{\omega^2} \sin \omega x \right] d\omega;$$
$$J(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pm 1; \\ -0,5, & x = -1; \\ 1,5, & x = 1. \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \\ 0, & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2} \cos \omega x \right] d\omega; \quad J(x) = f(x), \quad \forall x.$$

3) Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0;1]; \\ 0, & x > 1, \end{cases}$ продолжив ее на $(-\infty;0)$ нечетным образом.

$$\text{Ответ: } J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{2(\cos \omega - 1 + \omega \sin \omega) - \omega^2 \cos \omega}{\omega^3} \sin \omega x \right] d\omega;$$
$$J(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0;+\infty) \setminus \{1\}; \\ 0,5, & x = 1. \end{cases}$$

4) Записать для функции $y = e^{-|x-1|}$ интеграл Фурье в комплексной форме. Перейти к обычной форме.

$$\text{Ответ: } J(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega}}{1+\omega^2} \cdot e^{i\omega x} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\cos \omega}{1+\omega^2} \cos \omega x + \frac{\sin \omega}{1+\omega^2} \sin \omega x \right] d\omega.$$