

Домашнее задание по теме: «Применение степенных рядов 2»

1) Разлагая функции в ряд, найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

Ответ: $-\frac{1}{12}$.

2) Разлагая функции в ряд, найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$ ($a > 0$).

Ответ: $\ln^2 a$.

3) (4111) Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения уравнения $y' = x^2 - y^2$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(0) = 0$.

Ответ: $y = \frac{2}{3!}x^3 - \frac{80}{7!}x^7 + \dots$

4) (4221) Найти в форме степенного ряда частное решение уравнения $y'' = x \sin y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{\pi}{2}$. (Ограничиться шестью первыми членами)

Ответ: $y = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 - \frac{1}{4!}(x-1)^4 - \frac{6}{5!}(x-1)^5 + \dots$

5) (4247) Найти девять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' = x^2 y - y'$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ответ: $y = 1 + \frac{2}{4!}x^4 - \frac{2}{5!}x^5 + \frac{2}{6!}x^6 - \frac{2}{7!}x^7 + \frac{62}{8!}x^8 + \dots$

6) (4248) Записать в виде степенного ряда частное решение уравнения $y'' - xy' + y - 1 = 0$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Ответ: $y = \frac{x^2}{2} + \left[\frac{x^4}{4!} + \frac{3x^6}{6!} + \frac{5x^8}{8!} + \dots + \frac{(2n-1)x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dots \right]$