Математический анализ
Раздел: операционное исчисление

Тема: *Свойства преобразования Лапласа. Теоремы разложения*

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

§ 12. Свойства преобразования Лапласа

Будем обозначать: $f(t)$, $g(t)$, $x(t)$,… – оригиналы,
$F(p)$, $G(p)$, $X(p)$,… – их изображения.

1) Линейность изображения.

Если $f(t)$, $g(t)$ – оригиналы, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, то $\alpha f(t)+\beta g(t)$ – оригинал и

$$\alpha f(t)+\beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p)+\beta G(p)$$

2) Теорема подобия.

Справедливо утверждение: $f(\alpha t) \risingdotseq \dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right), \quad \forall\alpha>0$

3) Теорема запаздывания (оригинала)

Справедливо утверждение: $f(t-\alpha) \risingdotseq e^{-\alpha p}\cdot F(p)$

Замечание. Напомним, что

$$f(t) = f(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ f(t), & t \ge 0. \end{cases}$$

$$f(t-\alpha) = f(t-\alpha) \cdot \eta(t-\alpha) = \begin{cases} 0, & t-\alpha < 0; \\ f(t-\alpha), & t-\alpha \ge 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t-\alpha) = \begin{cases} 0, & t < \alpha; \\ f(t-\alpha), & t \ge \alpha. \end{cases}$$

4) Теорема смещения (запаздывания изображения).

Справедливо утверждение: $F(p-\alpha) \risingdotseq e^{\alpha t} \cdot f(t)$.

5) Дифференцирование оригинала

ТЕОРЕМА 1.

Если $f(t)$, $f'(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ *– оригиналы, то*

$$f'(t) \risingdotseq p\cdot F(p) - f(0) \ ,$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2\cdot F(p) - p\cdot f(0) - f'(0) \ ,$$

$$f'''(t) \risingdotseq p^3\cdot F(p) - p^2\cdot f(0) - p\cdot f'(0) - f''(0) \ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^{(\mathrm{n})}\cdot F(p) - p^{(\mathrm{n}-1)}\cdot f(0) - p^{(\mathrm{n}-2)}\cdot f'(0) - \ldots - p\cdot f^{(\mathrm{n}-2)}(0) - f^{(\mathrm{n}-1)}(0) \ ,$$

где $\quad f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t) \qquad (k = 0,1,2,...,n-1)$

6) Дифференцирование изображения

Справедливо утверждение:

$$F'(p) \risingdotseq -t\cdot f(t)\ ,$$
$$F''(p) \risingdotseq t^2\cdot f(t)\ ,$$
$$F'''(p) \risingdotseq -t^3\cdot f(t)\ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^{(\mathrm{n})}\cdot f(t)\ .$$

7) Интегрирование оригинала

Если $f(t)$ – оригинал, то

$$g(t) = \int_0^t f(t)dt$$

тоже является оригиналом и справедливо утверждение:

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

8) Интегрирование изображения

ТЕОРЕМА 2 (об интегрировании изображения).

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$,

$$\int_p^{\infty} F(p)dp \text{ – сходится абсолютно}$$

(*путь интегрирования предполагается целиком лежащим в области аналитичности* $F(p)$)

Тогда функция $\dfrac{f(t)}{t}$ *является оригиналом и*

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{\infty} F(p)dp$$

9) Умножение изображений

ТЕОРЕМА 3 (Бореля, об умножении изображений).

Пусть $f(t)$, $g(t)$ – *оригиналы,*

$$f(t) \risingdotseq F(p)\ ,\ \ g(t) \risingdotseq G(p)\ .$$

Тогда функция $$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

тоже является оригиналом и $\varphi(t) \risingdotseq F(p) \cdot G(p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ – оригиналы. *Интеграл*

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

называется ***сверткой функций*** $f(t)$ и $g(t)$.

ОБОЗНАЧАЮТ: $f(t) * g(t)$.

Очевидно, что $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 4 (формула Дюамеля).

Справедлива формула: $f'(t) * g(t) + f(0) \cdot g(t) \risingdotseq p \cdot F(p) \cdot G(p)$.

Т.е.

$$\int_0^t f'(\tau) g(t-\tau) d\tau + f(0) \cdot g(t) \risingdotseq p \cdot F(p) \cdot G(p) .$$

§13. Теоремы разложения

По теореме обращения (теорема 3 в §9)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

Кроме того, справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (вторая теорема разложения).

Пусть функция $F(p)$ *удовлетворяет условиям*:

1) $F(p)$ *аналитична в полуплоскости* $\mathrm{Re}p > s_0$ (*где* s_0 – *некоторое неотрицательное число*);
2) *в полуплоскости* $\mathrm{Re}p < s_0$ *функция* $F(p)$ *имеет только конечное число полюсов* $p_1, p_2, \ldots, p_n$;
3) $M(R) = \max\limits_{p \in C_R} \left| F(p) \right| \to 0$ *при* $R \to \infty$

   (*где* C_R – *дуга окружности* $|\, z \,| = R$, *лежащая в полуплоскости* $\mathrm{Re}p < s_0$);
4) *интеграл* $\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt} dp$ *сходится абсолютно для* $\forall a > s_0$.

Тогда оригиналом для функции $F(p)$ *является функция* $f(t) \cdot \eta(t)$, *где*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \underset{p=p_k}{res} [F(p) \cdot e^{pt}]$$

Замечание. Условиям теоремы 1 удовлетворяют в частности функции вида

$$\frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \quad \text{и} \quad \frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \cdot e^{-\alpha p}$$

где $Q_m(p)$, $Q_n(p)$ – многочлены степени m и n соответственно, причем $m < n$.

Другой способ найти оригинал $f(t)$ для изображений вида

$$\frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \quad \text{и} \quad \frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \cdot e^{-\alpha p}$$

– разложить дробь на сумму простейших и найти $f(t)$ как сумму оригиналов получившихся слагаемых.

Найти оригиналы для простейших дробей можно с помощью таблицы изображений и теоремы смещения (для простейших I , II и III типа) или теоремы умножения изображений (для простейших IV типа) .

ТЕОРЕМА 2 (первая теорема разложения)

Если функция $F(p)$ *аналитична в окрестности* ∞ *и ее ряд Лорана в окрестности* ∞ *имеет вид*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$$

то оригиналом для функции $F(p)$ *является функция*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \cdot t^{k-1}$$