Математический анализ
Раздел: операционное исчисление

Тема: ***Оригинал и изображение. Теорема обращения***

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

§ 11. Оригинал и изображение. Теорема обращения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Пусть $f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. *Функция* $f(t)$ *называется* ***оригиналом***, *если*

1) $f(t)$ *и ее производная* $f'(t)$ *определены и непрерывны на* $\mathbb{R}$ *за исключением может быть отдельных точек разрыва* I *рода, число которых на любом интервале конечно*;

2) $f(t)=0,\ \forall t<0$;

3) $\left|f(t)\right|<Me^{s_0 t}$, *где* M, s_0 – const , $s_0 \geq 0$ (s_0 *называют* ***порядком роста функции*** $f(t)$).

ПРИМЕР. Единичная функция Хэвисайда:

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Замечание.

Если для функции $\varphi(t)$ выполняются условия 1 и 3 определения 1, то функция $\varphi(t)\cdot\eta(t)$ будет являться оригиналом.
В дальнейшем будем писать $\sin t$, $\cos t$ и т. д. подразумевая $\sin t\cdot\eta(t)$, $\cos t\cdot\eta(t)$ и т. д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть $f(t)$ – *оригинал.* ***Изображением функции*** $\boldsymbol{f(t)}$ (***преобразованием Лапласа функции*** $\boldsymbol{f(t)}$) *называется фкп* $F(p)$, *определяемая равенством*

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt.$$

ЗАПИСЫВАЮТ: $F(p)=\mathrm{L}[f(t)]$, $F(p)\risingdotseq f(t)$, $f(t)\risingdotseq F(p)$.

ТЕОРЕМА 2.

Если $f(t)$ – *оригинал с показателем роста* s_0 , *то его изображение* $F(p)$ *является аналитической функцией в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,p > s_0$.

ТЕОРЕМА 3 (обращения).

Пусть $f(t)$ *– оригинал,* $f(t) \risingdotseq F(p)$. *Тогда в любой точке непрерывности функции* $f(t)$ *имеет место равенство*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C F(p) \cdot e^{pt} dp \qquad (1)$$

где C *– любая прямая* $\mathrm{Re}\, p = a > s_0$.

Замечание. Интеграл в (1) понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\int\limits_C F(p) \cdot e^{pt} dp = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{a-bi}^{a+bi} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

Принято писать:

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_{a-bi}^{a+bi} F(p) \cdot e^{pt} dp = \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

ТЕОРЕМА 4.

Пусть для функции $F(p)$ *выполнены условия*:

1) $F(p)$ *аналитична в полуплоскости* $\mathrm{Re}p > s_0$ (*где* s_0 – *некоторое неотрицательное число*);

2) $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$ *в любой полуплоскости* $\mathrm{Re}p \geq a > s_0$;

3) *интеграл* $\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p)dp$ *сходится абсолютно*.

Тогда $F(p)$ *является изображением некоторой функции, которая может быть найдена по формуле* (1) .