Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: ***Вычеты. Основная теорема о вычетах***

(основная теорема о вычетах, применение вычетов)

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

3. Основная теорема о вычетах

ТЕОРЕМА 9 (основная теорема о вычетах).

Пусть а) *функция* $f(z)$ *аналитична в ограниченной односвязной области* D *за исключением конечного числа изолированных особых точек* $z_1, z_2, \ldots z_n$;

б) C *– замкнутый контур в* D, *внутри которого содержатся точки* $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Тогда

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

СЛЕДСТВИЕ 10.

Пусть функция $f(z)$ *аналитична в ограниченной односвязной области* D *за исключением конечного числа изолированных особых точек* $z_1, z_2, \ldots z_n$. *Тогда сумма всех вычетов функции* $f(z)$ *относительно ее особых точек, включая вычет относительно* ∞, *равна нулю*, т.е.

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0$$

4. Применение вычетов при вычислении интегралов

а) Вычисление контурных интегралов

ПРИМЕР 1. Найти $$\oint\limits_{|z|=5} \frac{\sin 4z dz}{(z-2)^2 (z-3)(z-6)}$$

ПРИМЕР 2. Найти $$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^{15} dz}{z^8 + 2}$$

б) Вычисление интегралов типа $\int\limits_a^{a+2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$

Имеем: $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Замена: $z = e^{ix}$

Получим: $$\int\limits_a^{a+2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \oint\limits_{|z|=1} -\frac{i}{z} \cdot R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right)dz$$

ПРИМЕР 3. Найти $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5+3\sin x}$$

в) Вычисление интегралов типа $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)}dx$

(где $m \geq n+2$, $P_m(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

ТЕОРЕМА 11.

Пусть $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$,

где $P_n(x)$, $P_m(x)$ – *многочлены степени* n *и* m *соответственно, причем* $m \geq n+2$, $P_m(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Тогда $$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) \ ,$$

где z_1 , z_2 , … , z_m – *особые точки* $f(z)$, *лежащие в верхней полуплоскости* (*т.е.* $\mathrm{Im} z_k > 0$)

ПРИМЕР 4. Найти $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$

г) Вычисление интегралов типа $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx$

ЛЕММА 12 (Жордана).

Пусть имеется семейство дуг полуокружностей

$$C_{\mathrm{R}} : |z| = \mathrm{R}\,,\ \ \mathrm{Im}z \geq 0 \ \ (\text{где}\ \ R \to +\infty)$$

Обозначим $\quad M(R) = \max\limits_{z \in C_R} |f(z)|$.

Если $f(z)$ *аналитическая в верхней полуплоскости за исключением конечного числа особых точек и*

$$\lim_{R \to +\infty} M(R) = 0,$$

то
$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)dz = 0 \quad ,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

ТЕОРЕМА 13.

Пусть 1) $f(z)$ *аналитична на вещественной оси*

2) $f(z)$ *аналитична в верхней полуплоскости за исключением особых точек* $z_1, z_2, \ldots, z_m$;

3) $f(z)$ *удовлетворяет условиям леммы Жордана*.

Тогда для любого $\lambda > 0$ *интеграл*

$$J = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \cdot f(x)dx \quad \textit{– сходится}$$

и

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z} \cdot f(z) \ ,$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_m$ *– особые точки* $f(z)$, *лежащие в верхней полуплоскости* (*т.е.* $\mathrm{Im} z_k > 0$) .

СЛЕДСТВИЕ 14.

Пусть $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 13.

Тогда

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z}\cdot f(z)\right),$$

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z}\cdot f(z)\right),$$

где z_1 , z_2 , … , z_m – *особые точки* $f(z)$, *лежащие в верхней полуплоскости* (т.е. $\mathrm{Im} z_k > 0$) .

ПРИМЕР 5. Найти $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x dx}{x^2+2x+10}$