

Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: *Вычеты. Основная теорема о вычетах*

(вычет относительно конечной точки,
вычет относительно ∞)

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

§ 9. Вычеты. Основная теорема о вычетах

1. Вычет относительно конечной точки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вычетом функции $f(z)$ относительно конечной точки z_0 называется число, равное*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

где C – любой контур, удовлетворяющий условиям:

- z_0 лежит в области D , внутренней по отношению к C (т.е. в области, которая остается слева при обходе контура C против часовой стрелки);
- в области D и на ее границе C нет особых точек функции $f(z)$, за исключением может быть точки z_0 .

Обозначают: $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$

Из определения \Rightarrow если z_0 – правильная, то $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0$

ТЕОРЕМА 1 (связь вычета функции относительно $z_0 \in \mathbb{C}$ с коэффициентами ее ряда Лорана в окрестности z_0).

Вычет функции $f(z)$ относительно $z_0 \in \mathbb{C}$ равен коэффициенту a_{-1} разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ в области $0 < |z - z_0| < R$ (где R – такое число, что в области $0 < |z - z_0| < R$ функция $f(z)$ – аналитическая).

СЛЕДСТВИЕ 2 (о вычете относительно устранимой особой точки $z_0 \in \mathbb{C}$).

Если z_0 – устранимая особая точка, то $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0$

ТЕОРЕМА 3 (вычисление вычета относительно полюса $z_0 \in \mathbb{C}$).

Если $z_0 \in \mathbb{C}$ – полюс кратности m функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m \cdot f(z) \right]$$

СЛЕДСТВИЕ 4 (1-я формула для вычисление вычета относительно простого полюса $z_0 \in \mathbb{C}$).

Если $z_0 \in \mathbb{C}$ – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) \cdot f(z)]$$

СЛЕДСТВИЕ 5 (2-я формула для вычисление вычета относительно простого полюса $z_0 \in \mathbb{C}$).

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ – простой полюс функции $f(z)$ и $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

2. Вычет относительно ∞

Пусть ∞ – изолированная особая точка функции $f(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вычетом функции $f(z)$ относительно ∞ называется число, равное*

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

где C – любой контур, такой, что в области, внешней по отношению к C , нет конечных особых точек функции $f(z)$.

Обозначают: $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$

ТЕОРЕМА 6 (связь вычета функции относительно ∞ с коэффициентами ее ряда Лорана в окрестности ∞).

Вычет функции $f(z)$ относительно ∞ равен $-1 \cdot a_{-1}$, где a_{-1} – коэффициент при z^{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ∞ (т.е. в области $|z| > R$).

ТЕОРЕМА 7 (вычисление вычета относительно устранимой особой точки ∞)

Если ∞ – устранимая особая точка функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^2 \cdot f'(z)]$$

ТЕОРЕМА 8 (вычисление вычета относительно полюса ∞)

Если ∞ – полюс кратности m функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{m+2} \cdot f^{(m+1)}(z)]$$

Замечание. Вычисление вычета относительно ∞ можно свести к вычислению вычета относительно $z_0 = 0$ если сделать замену

$$z = \frac{1}{t}$$