Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: ***Особые точки***

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

§ 8. Особые точки

1. Изолированные особые точки

Точка z_0 , в которой функция $f(z)$ не является аналитической, называется ***особой точкой функции f(z)*** .

Точку, не являющуюся особой для $f(z)$, называют ***правильной точкой функции f(z)*** .

Точка z_0 называется ***изолированной особой точкой функции*** $f(z)$, если в некоторой ее окрестности нет других особых точек функции $f(z)$.

Изолированная особая точка z_0 называется

а) ***устранимой особой точкой***, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c$, где $c\in\mathbb{C}$;

б) ***полюсом***, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

в) ***существенно особой точкой***, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) - \nexists$

Замечание. Устранимую особую точку можно «устранить», доопределив (переопределив) функцию $f(z)$ равенством

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z) = c$$

Новая функция в точке z_0 будет аналитической.

ВЗАИМОСВЯЗЬ ХАРАКТЕРА ОСОБОЙ ТОЧКИ С ВИДОМ РЯДА ЛОРАНА ФУНКЦИИ В ЕЕ ОКРЕСТНОСТИ

1) Устранимые особые точки

ТЕОРЕМА 1 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее устранимой особой точки).

Изолированная особая точка z_0 *функции* $f(z)$ *является устранимой* $\Leftrightarrow$ *ряд Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* z_0 *не содержит главной части, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots$$

2) Полюсы

Точка z_0 называется ***нулем функции $\varphi(z)$*** если $\varphi(z_0) = 0$.

Точка z_0 называется ***нулем кратности m*** если

$$\varphi(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z), \quad \text{где } g(z_0) \neq 0 .$$

Нуль кратности 1 называется ***простым***.

ТЕОРЕМА 2 (связь полюсов и нулей функций).

Точка z_0 является нулем аналитической функции $\varphi(z) \Leftrightarrow z_0$ – полюс функции

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Кратность нуля z_0 аналитической функции $\varphi(z)$ называют* ***кратностью*** *(порядком)* ***полюса z_0 функции***

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

Полюс кратности 1 называют ***простым***.

ТЕОРЕМА 3 (вид ряда Тейлора функции в окрестности нуля).

Точка z_0 *является нулем кратности* m *аналитической функции* $\varphi(z)$ $\Leftrightarrow$ *ряд Тейлора функции* $\varphi(z)$ *в окрестности точки* z_0 *не содержит первых* m *членов, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = a_m (z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots$$

СЛЕДСТВИЕ 4 (связь кратности нуля с производными функции).

Точка z_0 *является нулем кратности* m *аналитической функции* $\varphi(z)$ $\Leftrightarrow$

$$\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \varphi''(z_0) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(z_0) = 0,$$

$$\varphi^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 5 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее полюса)

Изолированная особая точка z_0 *функции* $f(z)$ *является полюсом кратности* m $\Leftrightarrow$ *главная часть ряда Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* z_0 *содержит только m членов, т.е. имеет вид*

$$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots$$

СЛЕДСТВИЕ 6 (вид функции, имеющей полюс в точке z_0)

Точка z_0 *является полюсом кратности* m *функции* $f(z)$ $\Leftrightarrow$

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

где $g(z)$ *– аналитическая в точке* z_0 *и* $g(z_0)\neq 0$.

<u>3) Существенно особые точки</u>

ТЕОРЕМА 7 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее существенно особой точки)

Изолированная особая точка z_0 *функции* $f(z)$ *является существенно особой* $\Leftrightarrow$ *главная часть ряда Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* z_0 *содержит бесконечное число членов.*

2. Характер точки ∞

Говорят, что функция $f(z)$ ***аналитична в окрестности точки ∞***, если она аналитична в области $|z| > R$ (где R – некоторое число).

Точка ∞ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$ если $f(z)$ не имеет особых точек в области $|z| > R$ (где R – некоторое число).

Изолированная особая точка ∞ называется

а) ***устранимой особой точкой***, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = c$, где $c \in \mathbb{C}$;

б) ***полюсом***, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$;

в) ***существенно особой точкой***, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) - \nexists$.

Говорят, что функция $f(z)$ ***разложима в ряд Лорана в окрестности точки*** ∞, если она разложима в ряд Лорана по степеням z в кольце $R < |z| < +\infty$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \qquad R < |z| < +\infty$$

При этом

ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$ называют ***правильной частью ряда Лорана функции в окрестности*** ∞,

ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ называют ***главной частью ряда Лорана функции в окрестности*** ∞.

Для точки ∞ справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее изолированной особой точки ∞)

Изолированная особая точка ∞ *функции* $f(z)$ *является*

а) *устранимой* $\Leftrightarrow$ *ряд Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* ∞ *не содержит главной части, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

б) *полюсом кратности* m $\Leftrightarrow$ *главная часть ряда Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* ∞ *содержит только* $m+1$ *членов, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m$$

в) *существенно особой* $\Leftrightarrow$ *главная часть ряда Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* ∞ *содержит бесконечное число членов*.