

# Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: *Ряды в комплексной плоскости*  
(степенные ряды, ряды Лорана)

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

### 3. Степенные ряды

**Степенным комплексным рядом** называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

где  $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$ . Числа  $a_n$  называются **коэффициентами степенного ряда**.

Частный случай комплексного степенного ряда – ряд по степеням  $z$ :

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n. \quad (1)$$

Будем изучать ряд  $\sum a_nz^n$ , т.к. результаты на общий случай переносятся заменой  $z = z - z_0$ .

Степенной ряд  $\sum a_n z^n$  сходится хотя бы в одной точке (точке  $z = 0$ ).

ТЕОРЕМА 6 (Абеля для комплексных степенных рядов).

- 1) Если степенной ряд  $\sum a_n z^n$  сходится в точке  $z_1 \neq 0$ , то он сходится абсолютно в любой точке  $z$ , удовлетворяющей условию
$$|z| < |z_1|;$$
- 2) Если степенной ряд  $\sum a_n z^n$  расходится в точке  $z_2$ , то он расходится в любой точке  $z$ , удовлетворяющей условию
$$|z| > |z_2|.$$

Из теоремы 6  $\Rightarrow \exists R > 0$  такое, что ряд  $\sum a_n z^n$  сходится (абсолютно) при  $|z| < R$  и расходится при  $|z| > R$ .

Число  $R$  называют **радиусом сходимости** ряда  $\sum a_n z^n$ ,  
круг  $|z| < R$  называют **кругом сходимости** ряда  $\sum a_n z^n$ .

Применяя признак Даламбера (Коши) к исследованию ряда  $\sum |a_n z^n|$  находим:

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ где } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ или } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (2)$$

**Замечания.**

- 1) Формулы (2) справедливы, если ряд  $\sum a_n z^n$  – «полный» (т.е. присутствуют все степени  $z$ ).
- 2) Допускается  $R = 0$  (ряд сходится только в точке 0) и  $R = +\infty$  (ряд сходится на всей комплексной плоскости)
- 3) Для ряда  $\sum a_n (z - z_0)^n$  круг сходимости имеет вид:

$$|z - z_0| < R.$$

Если ряд  $\sum a_n (z - z_0)^n$  – «полный», то формулы (2) для него тоже справедливы.

## СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

- 1) Степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге, целиком лежащем в круге сходимости.
- 2) Сумма степенного ряда является функцией аналитической.
- 3) Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз. Получающиеся при этом ряды будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный.
- 4) Степенной ряд можно почленно интегрировать по любой кривой, лежащей в его круге сходимости.

## 4. Разложение фкп в степенной ряд

Напомним: говорят, что функция  $f(x)$  разложима в ряд, если  $\exists$  функциональный ряд  $\sum f_n(x)$ , суммой которого является  $f(x)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть  $f(z)$  – аналитическая в окрестности точки  $z_0$ . **Рядом Тейлора функции**  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  (по степеням  $z - z_0$ ) называется степенной ряд вида

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

ТЕОРЕМА 7 (о разложении фкп в степенной ряд).

Если функция  $f(z)$  аналитична в круге  $|z - z_0| < R_1$  (где  $R_1 \leq R$ ,  $R$  – радиус сходимости ряда Тейлора функции  $f(z)$ ), то она разлагается в этом круге в степенной ряд, причем этот ряд – ее ряд Тейлора, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in G = \{|z - z_0| < R_1\}$$

Разложения, полученные ранее для функций

$$e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \ln(1+x), \frac{1}{1+x}, \frac{1}{1-x}$$

остаются справедливыми и в комплексном случае.

## 5. Ряд Лорана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \stackrel{\text{опр}}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (3)$$

называется **рядом Лорана** (по степеням  $z - z_0$ , в окрестности точки  $z_0$ ).

Ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  называется **правильной частью ряда Лорана**,

$$\text{Ряд} \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

называется **главной частью ряда Лорана**.

ТАКИМ ОБРАЗОМ, ряд Лорана сходится в кольце

$$r < |z - z_0| < R,$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } R = \frac{1}{\ell}, \quad \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{или} \quad \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \quad \text{или} \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \end{aligned} \right\} (4)$$

**Замечания.**

- 1) Формулы (4) справедливы, если ряд Лорана – «полный» (т.е. присутствуют все степени  $z - z_0$ ).
- 2) Допускается  $r = 0$  (ряд сходится в проколотой окрестности точки  $z_0$ ) и  $R = +\infty$  (ряд сходится во внешности круга  $|z - z_0| < r$ ).
- 3) Если  $r \geq R$ , то ряд Лорана расходится на всей комплексной плоскости.

Из свойств функциональных рядов  $\Rightarrow$

ТЕОРЕМА 8 (о сумме ряда Лорана).

*Сумма ряда Лорана аналитична в кольце его сходимости.*

ТЕОРЕМА 9 (о разложении функции в ряд Лорана).

*Всякая функция  $f(z)$ , аналитическая в кольце  $r < |z - z_0| < R$ , может быть представлена в этом кольце в виде суммы ряда Лорана*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

где  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}} ,$

$C$  – любая окружность с центром в точке  $z_0$ , лежащая в кольце  $r < |z - z_0| < R$ .

Ряд Лорана, о котором идет речь в теореме 9, называется **рядом Лорана функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$**  (по степеням  $z - z_0$ ).

