Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: ***Интегрирование функций комплексного переменного***

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

§ 6. Интегрирование функций комплексного переменного

1. Интеграл от фкп

Пусть (AB) – простая (т.е. без кратных точек) спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Выберем на (AB) направление:

а) А – начало, В – конец, если (AB) не замкнутая;

б) против часовой стрелки, если (AB) – замкнутая.

Пусть $f(z)$ – однозначная функция, определенная на (AB).

1. Разобьем кривую (AB) произвольным образом на n частей точками $z_0=A$, z_1, …, $z_n=B$ в направлении от A к B.
2. На каждой дуге ($z_{i-1}z_i$) выберем произвольную точку ζ_i и вычислим произведение $f(\zeta_i)\cdot\Delta z_i$, где $\Delta z_i=z_i-z_{i-1}$.

Сумму $$I_n(z_i,\zeta_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\cdot\Delta z_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(z)$ по кривой (AB) (соответствующей данному разбиению кривой (AB)) и данному выбору точек ζ_i).

Пусть $$\lambda=\max_{1\le i\le n}\left|\Delta z_i\right|,$$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(z_i,\zeta_i)$ *при $\lambda\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любого разбиения кривой (AB) у которого $\lambda<\delta$, при любом выборе точек ζ_i выполняется неравенство*

$$\left|I_n(z_i,\zeta_i)-I\right|<\varepsilon$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(z_i,\zeta_i)$ при $\lambda\to 0$, то его называют ***интегралом от функции $f(z)$ по кривой (AB).***

Обозначают: $$\int_{(AB)} f(z)dz,\qquad \oint_{(AB)} f(z)dz$$

СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ОТ ФКП

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. *Интеграл от фкп зависит от направления движения по кривой. При изменении направления движения по кривой* (AB) *интеграл меняет знак*, т.е.

$$\int\limits_{(AB)} f(z)dz = -\int\limits_{(BA)} f(z)dz$$

2. *Если кривая* (AB) *замкнута, то интеграл не зависит выбора начальной точки* A, *а зависит от направления обхода кривой*.

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*, т.е.

$$\int\limits_{(AB)} c\cdot f(z)dz = c\cdot \int\limits_{(AB)} f(z)dz.$$

4. *Интеграл от алгебраической суммы двух* (*конечного числа*) *функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int\limits_{(AB)} \left[f(z)_1 \pm f_2(z)\right]dz = \int\limits_{(AB)} f_1(z)dz \pm \int\limits_{(AB)} f_2(z)dz$$

5. *Если кривая* (*AB*) *разбита точкой K на две части* (*AK*) *и* (*KB*), *то*

$$\int\limits_{(AB)} f(z)dz = \int\limits_{(AK)} f(z)dz + \int\limits_{(KB)} f(z)dz$$

(свойство аддитивности интеграла от фкп).

6. $$\left| \int\limits_{(AB)} f(z)dz \right| \le \int\limits_{(AB)} \left| f(z) \right| d\ell .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

7. *Если во всех точках кривой* (AB) *выполняется неравенство* $|f(z)| < \mathrm{M}$, то

$$\left| \int\limits_{(AB)} f(z)dz \right| \le M \cdot \ell ,$$

где ℓ – *длина кривой* (AB).

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕРАЛОВ ОТ ФКП

ТЕОРЕМА 1 (существования интеграла от фкп).
Если (ℓ) *– гладкая кривая, и функция* $f(z)$ *непрерывна на* (ℓ), *то* $f(z)$ *интегрируема по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} f(z)dz = \left[\int\limits_{(\ell)} u(x,y)dx - v(x,y)dy\right] + i\left[\int\limits_{(\ell)} v(x,y)dx + u(x,y)dy\right] \quad (1)$$

где $u(x,y)$, $v(x,y)$ – действительная и мнимая часть функции $f(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

ТЕОРЕМА 2.

Если гладкая кривая (ℓ) *задана параметрическими уравнениями*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad где\ \alpha \le t \le \beta \quad (A \leftrightarrow \alpha,\ B \leftrightarrow \beta),$$

и функция $f(z)$ *интегрируема по кривой* (ℓ), *то справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t)dt\ ,$$

где $z(t)=x(t)+iy(t)$ – комплексная форма параметрических уравнений кривой (ℓ) ,

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2. Интегрирование аналитических фкп

Напомним:

ТЕОРЕМА. *Пусть функции* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области* $D \subset Oxyz$.

Следующие условия эквивалентны:

1) *интеграл* $\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

не зависит от линии интегрирования;

2) $\oint\limits_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \forall (\ell) \subset D$;

3) *справедливы равенства* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$;

4) *выражение* $Pdx + Qdy + Rdz$ *является полным дифференциалом некоторой функции* $u(x,y,z)$, т.е.

$$du = Pdx + Qdy + Rdz \ .$$

Для плоской кривой и функций двух переменных получим:

ТЕОРЕМА. *Пусть функции* $P(x,y)$, $Q(x,y)$, *непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области* $D \subset Oxy$.

Следующие условия эквивалентны:

1) *интеграл* $\int\limits_{(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

не зависит от линии интегрирования;

2) $\oint\limits_{(\ell)} Pdx + Qdy = 0 \quad \forall (\ell) \subset D$;

3) *справедливы равенства* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$;

4) *выражение* $Pdx + Qdy$ *является полным дифференциалом некоторой функции* $u(x,y)$, т.е.

$$du = Pdx + Qdy \; .$$

ТЕОРЕМА 3 (Коши, для односвязной области).

Если функция $f(z)$ *аналитична в односвязной области* $D\subset\mathbb{C}$, *то интеграл от этой функции по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру* (ℓ), *целиком лежащему в* D, *равен нулю*.

ЗАМЕЧАНИЯ.

1) Порядком связности области называется число связных частей, на которые разбивается ее граница.

2) Утверждение, обратное теореме 3, тоже справедливо. А именно:

Если $f(z)$ *непрерывна в односвязной области* $D\subset\mathbb{C}$ *и для любого кусочно-гладкого замкнутого контура* $(\ell)\subset D$ *выполняется условие*

$$\oint\limits_{(\ell)} f(z)dz = 0,$$

то $f(z)$ *аналитична в* D (теорема Морера).

ТЕОРЕМА 4 (о независимости интеграла от аналитической функции от формы кривой).

Если функция $f(z)$ *аналитична в односвязной области* $D \subset \mathbb{C}$, *то* $\forall A,B \in D$ *интеграл*

$$\int_{(AB)} f(z)dz$$

не зависит от формы кривой, соединяющей точки A *и* B.

Пусть G – $(n+1)$-связная область, (ℓ), (ℓ_1),…,(ℓ_n) – ее границы.

(ℓ) – внешняя граница G,

(ℓ_1), …, (ℓ_n) – внутренние границы G .

ТЕОРЕМА 5 (Коши для многосвязной области).

Пусть кривые (ℓ), (ℓ_1) ,…, (ℓ_n) – *кусочно-гладкие, не пересекающиеся и ни одна из областей, ограниченных* (ℓ_i) *не содержит кривой* (ℓ_j).

Если $f(z)$ *аналитична в области* G *и на ее границах, то*

$$\oint_{+(\ell)} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{+(\ell_k)} f(z)dz .$$

3. Первообразная аналитической функции
Неопределенный интеграл

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $F(z)$ *называется* ***первообразной функции*** $f(z)$ *на множестве* D, *если* $F'(z) = f(z), \quad \forall z \in D.$

Пусть $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, $z_0, z \in D$.

Тогда интеграл $$\int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

не зависит от формы кривой, соединяющей z_0 и z.

$\Rightarrow$ Если z_0 фиксировано, то $$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z)$$

ТЕОРЕМА 6 (о существовании первообразной).

Пусть $f(z)$ *аналитична в односвязной области* $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$.

Тогда $$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

является первообразной функции $f(z)$ *в* D.

ТЕОРЕМА 7 (о количестве первообразных).

Любые две первообразные для одной аналитической функции отличаются на константу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 7.

Если $f(z)$ *аналитическая и* $f'(z) = 0$ *в некоторой области* D, *то в этой области* $f(z) = \mathrm{const}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Множество всех первообразных функции* $f(z)$ *называют* ***неопределенным интегралом*** *от функции* $f(z)$ *и обозначают*

$$\int f(z)dz$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 6 и 7.

Если $f(z)$ *аналитична в односвязной области* $D \subset \mathbb{C}$, *то ее неопределенный интеграл может быть записан в виде*

$$\int f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(z)dz + C$$

где C – *произвольная постоянная* (C$\in\mathbb{C}$), *а интеграл берется вдоль любой кривой в* D, *соединяющей точки* z_0 *и* z .

ТЕОРЕМА 8 (формула Ньютона – Лейбница для интеграла от аналитической функции).

Если $f(z)$ *аналитична в односвязной области* $D \subset \mathbb{C}$, *то интеграл от* $f(z)$ *не зависит от формы кривой, соединяющей точки* z_1 *и* z_2 , *и справедлива формула*:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

4. Интегральная формула Коши

ТЕОРЕМА 9 (интегральная формула Коши).

Пусть D *– односвязная область, ограниченная кусочно-гладким контуром* C;

$\overline{D} = D \bigcup C$ *– замыкание области* D ;

$f(z)$ *аналитична в замкнутой области* $\overline{D}$

Тогда для любой точки $z_0 \in D$ *справедлива формула*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} \qquad (2)$$

Формула (2) *называется* ***интегральной формулой Коши*** .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть (ℓ) – кусочно-гладкая кривая ;
$f(z)$ – непрерывна на (ℓ) .
Рассмотрим интеграл
$$\int_{\ell} \frac{f(t)dt}{t-z}, \qquad (z \notin \ell)$$

Интеграл вида
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell} \frac{f(t)dt}{t-z} = F(z)$$
где z – любая точка $\notin (\ell)$, называется ***интегралом типа Коши***.

ТЕОРЕМА 10 (об аналитичности интеграла типа Коши).
Функция $F(z)$, определенная интегралом типа Коши, аналитична в любой конечной точке $z \notin (\ell)$.
Кроме того, она имеет производные любого порядка, причем справедлива формула
$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\ell} \frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 10 (теорема о производных высших порядков аналитической функции).

Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D и на ее кусочно-гладкой границе C.

Тогда $f(z)$ имеет в D производные любого порядка, причем для них справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

где z_0 – любая точка области D.