Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: ***Неалгебраические операции на*** $\mathbb{C}$.
Б.б. последовательности комплексных чисел

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

2. Неалгебраические операции с комплексными числами

1) Если $x \in \mathbb{R}$, то

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n .$$

Пусть $z = x + \mathrm{i}y$. **Полагаем**:

$$e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n .$$

$\Rightarrow$ по определению

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cdot (\cos y + \mathrm{i}\sin y) . \qquad (1)$$

Справедливы утверждения (доказать самостоятельно):

1) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$,

2) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

Замечание. Из (1), при $x = 0$, получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \,.$$

$$\Rightarrow\; z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}\,,\quad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Представление комплексного числа в виде $z = r \cdot e^{i\varphi}$ (где r – модуль к.ч., φ – аргумент к.ч.), называется ***показательной формой записи*** к.ч.

2) Если $\forall y \in \mathbb{R}$, то $$e^{iy} = \cos y + i \sin y ,$$
$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y .$$

$$\Rightarrow \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \tag{2}$$

Формулы (2) называются ***формулами Эйлера***.

Пусть $z = x + iy$. **Полагаем**:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Справедливы утверждения (доказать самостоятельно):

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 ,$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2 ,$$
$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2 .$$

3) Если $\forall x \in \mathbb{R}$, то

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

Пусть $z = x + \mathrm{i}y$. **Полагаем:**

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Справедливы утверждения (доказать самостоятельно):

$$\cos(\mathrm{i}z) = \operatorname{ch} z, \qquad \operatorname{ch}(\mathrm{i}z) = \cos z;$$

$$\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i} \cdot \operatorname{sh} z, \qquad \operatorname{sh}(\mathrm{i}z) = \mathrm{i} \cdot \sin z;$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \cdot \sin z$$

4) Пусть $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число w назовем* ***натуральным логарифмом числа z***, *если* $\mathrm{e}^w = z$.

Замечание. Натуральный логарифм числа z определен неоднозначно.

Все значения натурального логарифма z обозначают $\mathrm{Ln}z$.

Если $z = x + \mathrm{i}y = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, то

$$\mathrm{Ln}z = \ln r + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Arg}z = \ln r + \mathrm{i}\varphi + \mathrm{i} \cdot 2\pi k.$$

Число $\ln r + \mathrm{i}\varphi = \ln|z| + \mathrm{i} \cdot \arg z$ называется ***главным значением логарифма*** числа z.

Справедливы **<u>равенства множеств</u>**

1) $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$,

2) $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\,z_1 - \mathrm{Ln}\,z_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Ln}\,z - \mathrm{Ln}\,z = 2\pi k i$

5) Аналогично, как обратные к соответствующим операциям, вводятся операции

$$\mathrm{Arcsin}z\,,\ \ \mathrm{Arccos}z\,,\ \ \mathrm{Arctg}z\,,\ \ \mathrm{Arcctg}z\,,$$

$$\mathrm{Arcsh}z\,,\ \ \mathrm{Arcch}z\,,\ \ \mathrm{Arcth}z\,,\ \ \mathrm{Arccth}z\,.$$

При этом получим равенства (доказать самостоятельно):

$$\mathrm{Arcsin}\,z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \qquad \mathrm{Arccos}\,z = -i\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\mathrm{Arctg}\,z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right), \qquad \mathrm{Arcctg}\,z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{iz - 1}{iz + 1}\right),$$

$$\mathrm{Arcsh}\,z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right), \qquad \mathrm{Arcch}\,z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\mathrm{Arcth}\,z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right), \qquad \mathrm{Arccth}\,z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right).$$

3.Бесконечно большие последовательности к.ч.

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Последовательность* $\{z_n\}$ *называют* ***бесконечно большой***, *если* $\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ *такое, что*

$$|z_{\mathrm{n}}| > M , \quad \forall n > N.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ Б.Б. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Дополним множество $\mathbb{C}$ элементом, обозначаемым ∞ .

∞ называют ***бесконечно удаленной точкой комплексной плоскости*** и полагают:

$$\frac{1}{0} = \infty, \qquad \frac{1}{\infty} = 0;$$

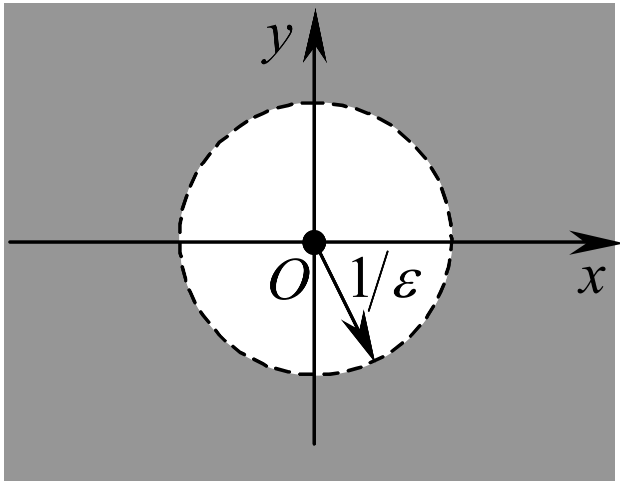
$$z \cdot \infty = \infty, \ \forall z \neq 0; \qquad z \pm \infty = \infty, \ \forall z \in \mathbb{C} .$$

Выражения $\quad 0 \cdot \infty, \quad \dfrac{\infty}{\infty}, \quad \infty \pm \infty \quad$ не определены.

Комплексную плоскость, дополненную символом ∞ , называют ***расширенной комплексной плоскостью*** и обозначают $\overline{\mathbb{C}}$.

ε-окрестностью точки ∞ называют множество точек $z \in \mathbb{C}$, для которых

$$|z| > \frac{1}{\varepsilon}$$



т.е. ε-окресность точки ∞ – область, вне круга с центром в точке O и радиуса $1/\varepsilon$.

Обозначают: U(∞, ε)

Если $\{z_n\}$ – б.б. последовательность, то с геометрической точки зрения это означает, что *в любой ε-окрестности точки ∞ находятся все члены последовательности* $\{z_n\}$, *за исключением может быть конечного их числа*.

(Геометрическая интерпретация б.б. последовательности).

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty, \qquad z_n \to \infty$

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$.
Имеем: $\{z_n\} \leftrightarrow \{x_n\}$, $\{y_n\}$.

ТЕОРЕМА 3 (о связи б.б. последовательностей $\{z_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$).

Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *– б.б. последовательности, то последовательность* $\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$ *тоже является б.б.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно.

Замечание. Утверждение, обратное теореме 3, неверно.