Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: ***Комплексные числа. Последовательности комплексных чисел***

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

Глава. Теория функций комплексного переменного

§1. Комплексные числа (повторение)

1. Определение

Выражение вида $x + \mathrm{i}y$ (где $x,y\in\mathbb{R}$) называется ***комплексным числом*** (в алгебраической форме).

Обозначают: $\{ z = x + \mathrm{i}y \mid \forall x,y\in\mathbb{R}\} = \mathbb{C}$.

Называют: x – ***действительная часть*** z (обозначают: $\mathrm{Re}z$)

y – ***мнимая часть*** z (обозначают: $\mathrm{Im}z$).

Если $x = 0$, то к.ч. называют ***чисто мнимым***.

Если $y = 0$, то $z = x$ – действительное число.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (говорят: *множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел*)

2. Арифметические действия над к.ч.

Пусть $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$.

а) **Сложение (вычитание) к.ч.:**

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2)$$

б) **Умножение к.ч.:**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + \mathrm{i}(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Частный случай – возведение в степень n ($n \in \mathbb{N}$):

$$z^n = (x + \mathrm{i}y)^n = (x + \mathrm{i}y) \cdot (x + \mathrm{i}y) \cdot \ldots \cdot (x + \mathrm{i}y)$$

в) **Деление к.ч:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\dfrac{(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2}$

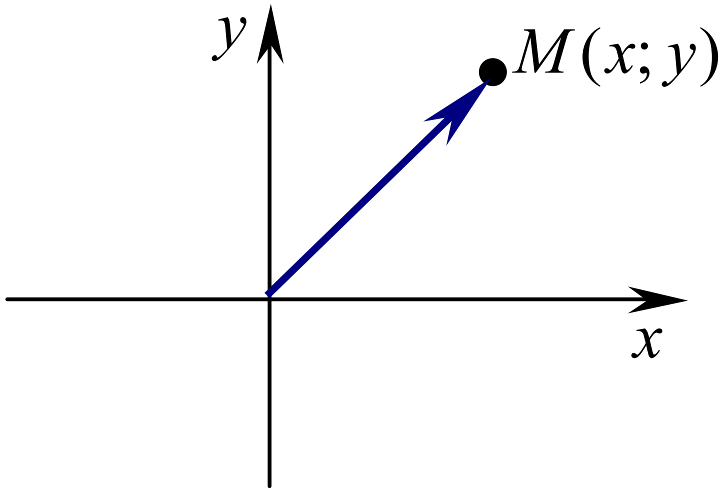
т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2},$$

где $\bar{z}_2 = x_2 - \mathrm{i}y_2$ – ***комплексно сопряженное*** к z_2

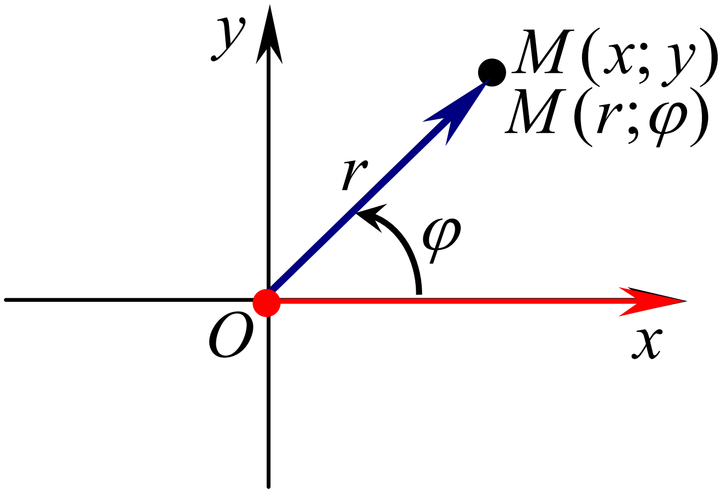
3. Геометрическая интерпретация к.ч.

Имеем: $z = x + \mathrm{i}y \quad \leftrightarrow \quad M(x\,;y)$



Комплексная плоскость

Пусть на комплексной плоскости введена полярная система координат



Тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$\Rightarrow z = x + \mathrm{i}y = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма записи к.ч.

НАЗЫВАЮТ: r – ***модуль*** к.ч. z , φ – ***аргумент*** к.ч. z

ОБОЗНАЧАЮТ:

$|z|$ – модуль к.ч. z ;

$\arg z$ – главное значение аргумента (т.е. $\varphi \in [0;2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi;\pi]$);

$\mathrm{Arg}z$ – все значения аргумента (т.е $\mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$).

Пусть $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Тогда: 1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$,

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

3) $z^n = [r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n \cdot [\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$

(где $n \in \mathbb{N}$)

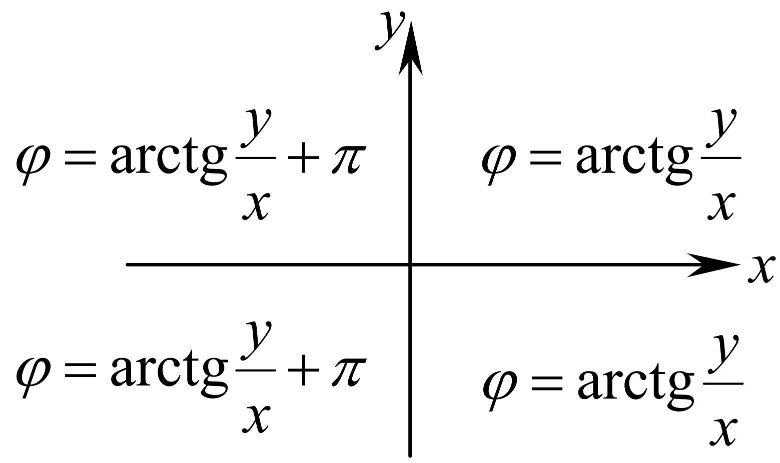
4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \{\omega_0, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}\}$, где

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right], \quad k = \overline{0; n-1}$$

4. Переход от алгебраической формы записи к.ч. к тригонометрической

Пусть $z = x + \mathrm{i}y$.

Тогда $\quad |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$



$$\Rightarrow \quad \arg z = \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \textit{если} \;\; x > 0\,; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \textit{если} \;\; x < 0\,; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \textit{если} \;\; x = 0, \;\; y > 0\,; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \textit{если} \;\; x = 0, \;\; y < 0\,. \end{cases}$$

§2. Последовательности комплексных чисел

1. Определения и основные утверждения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Последовательностью к.ч. называется перенумерованное множество комплексных чисел*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Последовательностью к.ч. называется функция, заданная на множестве натуральных чисел и имеющая множеством значений некоторое множество комплексных чисел*, т.е $z_n : \mathbb{N} \to \mathrm{Z}$, где $\mathrm{Z} \subseteq \mathbb{C}$.

Принято обозначать:

n (или k) – аргумент последовательности

z_{n}, w_{n} – значения функции

Записывают последовательность:

$\{ z_1, z_2, \ldots, z_{\mathrm{n}}, \ldots \}$ – развернутая запись;

$\{ z_{\mathrm{n}} \}$ – короткая запись (где z_{n} – общий член)

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ *называется* ***пределом последовательности*** $\{ z_n \}$ *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ *такое*, *что*

$$| z_n - z_0 | < \varepsilon \,, \ \ \forall n > N.$$

Записывают: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0 ,\qquad z_n \to z_0$

Говорят: *последовательность* $\{z_n\}$ *сходится* (*стремиться*) *к* z_0.

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся*** (сходящейся к z_0)

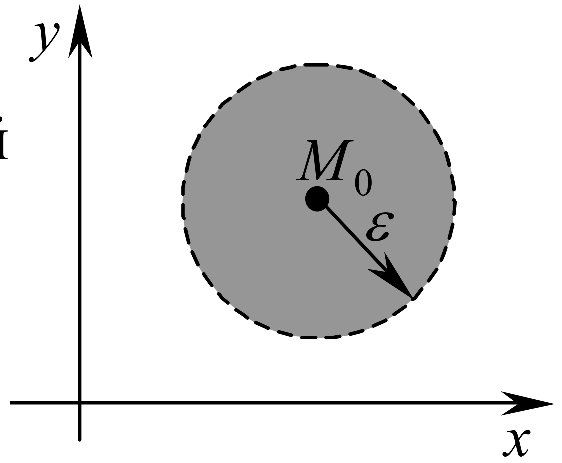
Последовательность, не имеющую предела, называют ***расходящейся***.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ К.Ч.

Имеем: $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \;\leftrightarrow\; M_0(x_0, y_0)$

ε-***окресностью числа*** z_0 называют открытый круг с центром в M_0 и радиуса ε .

Обозначают: $\mathrm{U}(z_0, \varepsilon)$



$\Rightarrow$ если $z = x + \mathrm{i}y \in \mathrm{U}(z_0, \varepsilon)$, то $|M_0M| < \varepsilon$ (где $M(x, y)$)

$$\Rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |z - z_0| < \varepsilon$$

Таким образом $\mathrm{U}(z_0, \varepsilon) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$ (алгебраическое определение ε-окрестности точки z_0)

Если $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, то с геометрической точки зрения это означает, что *в любой ε-окрестности точки z_0 находятся все члены последовательности $\{z_\text{n}\}$, за исключением может быть конечного их числа*. (Геометрическая интерпретация предела последовательности комплексных чисел).

$\Rightarrow z_0$ – точка «сгущения» последовательности $\{ z_\text{n} \}$.

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$.

Имеем: $\{z_n\} \leftrightarrow \{x_n\}$, $\{y_n\}$.

ТЕОРЕМА 1 (о связи сходимости последовательностей $\{z_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$).

Последовательность $\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$ сходится к $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ $\Leftrightarrow$ сходятся последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 , \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из теоремы 1 следует, что часть свойств последовательностей действительных чисел остаются справедливыми для последовательностей к.ч.

А именно, справедливы следующие утверждения:

1) *Отбрасывание* (*добавление*) *конечного числа членов последовательности не влияет на ее сходимость*.

2) *Последовательность может иметь не более одного предела*

3) *Если* $\{ z_n \} \to z_0$, *то* $\{ | z_n | \} \to | z_0 |$.

4) *Сходящаяся последовательность ограничена*.

5) *Пусть* $\{ z_n \}$ *и* $\{ w_n \}$ – *сходящиеся последовательности и*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = w_0 .$$

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже являются сходящимися последовательностями, причем

$$a) \quad \lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = z_0 \pm w_0 ;$$

$$b) \quad \lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = z_0 \cdot w_0 ;$$

$$c) \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{z_n}{w_n}\right) = \frac{z_0}{w_0} \quad (w_0 \neq 0).$$

6) *Если* $\{z_n\}$ *сходится к* z_0, *то* $\forall c \in \mathbb{C}$ *последовательность* $\{cz_n\}$ *тоже сходится, причем*

$$\lim_{n\to\infty}(cz_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} z_n = cz_0 .$$

(Следствие свойства 5(*b*))

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{r_n \cdot (\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)\}$.
Имеем: $\{z_n\} \leftrightarrow \{r_n\}$, $\{\varphi_n\}$.

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие сходимости последовательности к.ч.).

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r, \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi.$$

Тогда последовательность $\{z_n\}=\{r_n \cdot (\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)\}$ – *сходится*, *причем*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Замечание. Утверждение обратное теореме 2 неверно.

Например: $$\{z_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n} i\right\} \to 0,$$

но $$\{z_n\} = \left\{\frac{1}{n}\left(\cos\frac{(-1)^n\cdot\pi}{2} + i\sin\frac{(-1)^n\cdot\pi}{2}\right)\right\},$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot\pi}{2} \quad - \quad \nexists.$$

ПРИМЕР. С помощью теоремы 2, найти предел последовательности

$$z_n = \left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right\}, \quad \text{где } z = x + \mathrm{i}y .$$