Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: ***Интеграл Фурье***

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

§24. Интеграл Фурье

Представление функции интегралом Фурье – разложение непериодической функции на гармонические компоненты, частоты которых пробегают непрерывную совокупность значений.

1. Действительная и комплексная формы записи интеграла Фурье.

Пусть $f(x)$ – непериодическая, определенная на $\mathbb{R}$.

Пусть выполняются условия:

1) $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле или кусочно-гладкая на $[-\ell\,;\,\ell]$, $\forall \ell > 0$.

2) $f(x)$ ***абсолютно интегрируемая на всей числовой оси***, т.е. сходится (в смысле главного значения) интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$$

Фиксируем $\ell > 0$ и запишем на $[-\ell\,;\,\ell]$ ряд Фурье для $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x \right).$$

Рассмотрим

$$J(x) = \lim_{\ell \to +\infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x \right) \right].$$

Получим
$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega (t - x) dt . \qquad (1)$$

Интеграл (1) называется ***двойным интегралом Фурье*.**

Интеграл (1) можно привести к виду

$$J(x)=\int_{0}^{+\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega, \qquad (2)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt,\\ B(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Интеграл (2) называется ***интегралом Фурье***.

ТЕОРЕМА 1 (о представлении функции интегралом Фурье).

Пусть $f(x)$ *определена на* $\mathbb{R}$ *и удовлетворяет условиям*:

1) $f(x)$ *абсолютно интегрируема на* $\mathbb{R}$;
2) $f(x)$ *удовлетворяет условиям Дирихле или кусочно-гладкая на любом отрезке* $[-\ell\,;\,\ell]$.

Тогда функция $f(x)$ *представима своим интегралом Фурье, т.е. ее интеграл Фурье* $J(x)$ *сходится в каждой точке* $x\in\mathbb{R}$ *и справедливо равенство*

а) $J(x) = f(x)$, *если* x *– точка непрерывности* $f(x)$;

б) $J(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, *если* x *– точка разрыва* $f(x)$.

ПРИМЕР. Представить в виде интеграла Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<0 \\ \pi x, & \text{при} \quad 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{при} \quad x>1 \end{cases}$$

Более компактной формой записи интеграла Фурье является его ***комплексная форма*:**

$$J(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)e^{i\omega x}d\omega. \qquad (4)$$

где
$$C(\omega)=\frac{A(\omega)-iB(\omega)}{2}=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right). \qquad (5)$$

2. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций

Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

а) Пусть $f(x)$ – четная.

Тогда ее интеграл Фурье:
$$J(x) = \int_{0}^{+\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega,$$

где
$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt.$$

б) Пусть $f(x)$ – нечетная.

Тогда ее интеграл Фурье:
$$J(x) = \int_{0}^{+\infty} B(\omega) \sin \omega x d\omega,$$

где
$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

3. Представление интегралом Фурье функций, заданных на $[0\ ;+\infty)$

Пусть $f(x)$ задана на $[0\ ;+\infty)$ и удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[0\ ;+\infty)$;
2) $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле или кусочно-гладкая на любом отрезке $[0\ ;\ \ell]$.

Доопределим $f(x)$ на $(-\infty\ ;0)$ (четным или нечетным образом).

Получившаяся функция $F(x)$ представима интегралом Фурье.

Интеграл Фурье для $F(x)$, рассматриваемый только на $[0\ ;+\infty)$, называют интегралом Фурье функции $f(x)$ на $[0\ ;+\infty)$.