§10. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

1. Возрастание и убывание функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***возрастающей (неубывающей)*** *на интервале* $(a; b)$ *если для любых* $x_1, x_2 \in (a; b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *значения функции* $f(x_1)$ *и* $f(x_2)$ *удовлетворяют неравенству* $f(x_1) < f(x_2)$[1] $(f(x_1) \le f(x_2))$.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***убывающей (невозрастающей)*** *на интервале* $(a; b)$ *если для любых* $x_1, x_2 \in (a; b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *значения функции* $f(x_1)$ *и* $f(x_2)$ *удовлетворяют неравенству* $f(x_1) > f(x_2)$[2] $(f(x_1) \ge f(x_2))$.

Интервалы возрастания и убывания функции называются *интервалами монотонности функции*.

Из определения возрастающей функции следует, что если $f(x)$ возрастает на $(a; b)$, то на этом интервале приращение аргумента Δx и соответствующее ему приращение функции $\Delta f(x)$ будут иметь одинаковый знак.

Действительно, если $\Delta x > 0$, то $x + \Delta x > x$

$$\Rightarrow \quad f(x + \Delta x) > f(x),$$

$$\Rightarrow \quad \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) > 0.$$

Если $\Delta x < 0$, то $x + \Delta x < x$

$$\Rightarrow \quad f(x + \Delta x) < f(x),$$

$$\Rightarrow \quad \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) < 0.$$

Аналогично показывается, что если $f(x)$ убывает на $(a; b)$, то на этом интервале приращение аргумента Δx и соответствующее ему приращение функции $\Delta f(x)$ будут иметь разный знак.

Справедлива следующая теорема.

---

[1] Иначе говоря, функция $y = f(x)$ называется возрастающей на интервале $(a; b)$, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее значение функции.

[2] Иначе говоря, функция $y = f(x)$ называется убывающей на интервале $(a; b)$, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует меньшее значение функции.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) функции). *Пусть функция* $y = f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(a; b)$. *Тогда*

1) *если функция* $y = f(x)$ *возрастает (убывает) на* $(a; b)$, *то на этом интервале ее производная неотрицательна (неположительна), т.е.* $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a; b)$ ($f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a; b)$);
2) *если производная* $f'(x)$ *на интервале* $(a; b)$ *положительна (отрицательна), т.е.*
$$f'(x) > 0,\ \forall x \in (a; b)\ \ (f'(x) < 0,\ \forall x \in (a; b)),$$
то функция $y = f(x)$ *на* $(a; b)$ *возрастает (убывает).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО[3]

1) (Необходимость.) Пусть $y = f(x)$ возрастает на $(a; b)$. Требуется доказать, что $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a; b)$.

Так как $f(x)$ возрастает на $(a; b)$, то знак Δx и соответствующего ему приращения $\Delta f(x)$ совпадают.
$$\Rightarrow\ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0,\ \forall x \in (a; b),\ \forall \Delta x$$
(при условии, что $x + \Delta x \in (a; b)$).

Но тогда
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Аналогично доказывается, что если $y = f(x)$ убывает на $(a; b)$, то $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a; b)$.

2) (Достаточность.) Пусть $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a; b)$. Требуется доказать, что $f(x)$ возрастает на $(a; b)$.

Пусть $x_1, x_2 \in (a; b)$, $x_1 < x_2$. Рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1)$. По теореме Лагранжа, существует точка $\xi \in (x_1; x_2)$, такая, что
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$
$$\Rightarrow\ f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$
Так как $f'(\xi) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$ получаем:
$$f(x_2) - f(x_1) > 0,$$
$$f(x_2) > f(x_1).$$
Следовательно, $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$.

Аналогично доказывается, что если $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a; b)$, то $y = f(x)$ убывает на $(a; b)$. ■

---

[3] см. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1, стр. 145.

2. Экстремумы функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, x_0 – внутренняя точка X (т.е. существует некоторая окрестность точки x_0, целиком лежащая во множестве X).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точка x_0 называется **точкой максимума функции** $f(x)$ если существует такая δ-окрестность $U(x_0;\delta)$ точки x_0, что $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in U^*(x_0,\delta)$. Значение функции в точке максимума называется **максимумом функции**.*

*Точка x_0 называется **точкой минимума функции** $f(x)$ если существует такая δ-окрестность $U(x_0;\delta)$ точки x_0, что $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in U^*(x_0,\delta)$. Значение функции в точке минимума называется **минимумом функции**.*

Точки минимума и максимума функции называются ее ***точками экстремума***. Минимумы и максимумы функции называются ее ***экстремумами***.

Замечания:

1) Понятия минимум и максимум функции близки к понятиям наименьшее и наибольшее значения функции. По сути, они отражают одно свойство функции: они показывают, в каком отношении находятся значение функции в данной точке и значения функции в других точках. Различие в области действия этих понятий. Наибольшее и наименьшее значения – понятия глобального характера («$\forall x \in D(f)$»), максимум и минимум – понятия локального характера («$\forall x \in U^*(x_0,\delta)$»). Чтобы подчеркнуть эту взаимосвязь понятий, в некоторой литературе употребляют термины «глобальный максимум (минимум)» вместо наибольшего (наименьшего) значения функции и «локальный максимум (минимум)» – вместо максимум (минимум) функции.

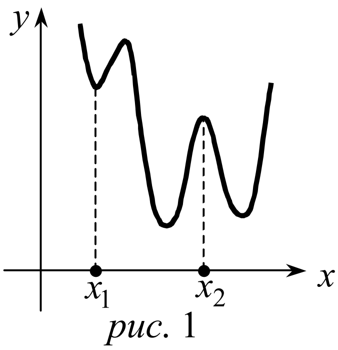


рис. 1

2) В силу локального характера понятий максимума и минимума, функция может иметь в своей области определения несколько точек максимума и минимума. Причем, некоторые минимумы функции могут быть больше ее максимумов (см. рис. 1).

Для функции, дифференцируемой в точке x_0, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 (необходимое условие экстремума, теорема Ферма). *Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$ и $f(x)$ – дифференцируема в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю.*

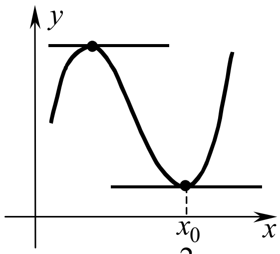


рис. 2

<u>Геометрический смысл теоремы 2</u>. *Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$ и кривая $y=f(x)$ имеет невертикальную касательную в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, то эта касательная – горизонтальная* (см. рис 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО[4]

Пусть, для определенности x_0 – точка максимума функции. Так как $f(x)$ – дифференцируема в точке x_0, то существуют $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, причем

$$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0).$$

По определению

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Так как x_0 – точка максимума функции, то $f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0.

$$\Rightarrow\quad f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0$$

и

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0 \quad \text{при} \quad \Delta x<0,$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0 \quad \text{при} \quad \Delta x>0.$$

Следовательно,

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0,$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0.$$

Итак, получили:

$$f'_-(x_0)\ge 0,\quad f'_+(x_0)\le 0$$

и

$$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0).$$

Но это возможно только при

$$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)=0. \qquad \blacksquare$$

Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю, называются ***стационарными точками функции*** $f(x)$.

Очевидно, что не любая стационарная точка функции является ее точкой экстремума. Например, функция $y=x^3$ имеет стационарную точку

[4] см. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1, стр. 148.

$x_0 = 0$, которая не является ее точкой экстремума. Для функции, дифференцируемой в точке x_0, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3 (первое достаточное условие экстремума функции). *Пусть x_0 – внутренняя точка области определения функции $f(x)$, $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности, за исключением, возможно, самой точки x_0. Если при переходе через точку x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак, то x_0 является точкой экстремума. При этом, если производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума, если с минуса на плюс – то x_0 – точка минимума.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО[5]

Пусть, например, при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус.

По формуле Лагранжа для любой точки x из некоторой окрестности $U(x_0;\delta)$ точки x_0 справедливо равенство

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где ξ – некоторая точка, лежащая между x и x_0. Используя это равенство, определим знак $f(x) - f(x_0)$. Имеем:

1) если $x < x_0$, то $f'(\xi) > 0$, $x - x_0 < 0$ и $$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) < 0;$$
2) если $x > x_0$, то $f'(\xi) < 0$, $x - x_0 > 0$ и $$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) < 0.$$

Таким образом, для любой точки x из некоторой окрестности $U(x_0;\delta)$ точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) - f(x_0) < 0$$

и, следовательно, точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Аналогично доказывается, что если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$. ■

Замечание. Из теоремы 3 следует, что точками экстремума могут быть не только стационарные точки, но и точки, в которых функция не имеет производной (точки разрыва производной).

Стационарные точки функции $f(x)$ и точки, в которых производная функции $f(x)$ не существует, называются ***критическими точками* I *рода*** (***критическими точками по первой производной***).

[5] см. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1, стр. 150-151.

ПРИМЕР. Найти экстремумы функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

РЕШЕНИЕ

1) Находим область определение функции:

$$D(y) = \mathbb{R}.$$

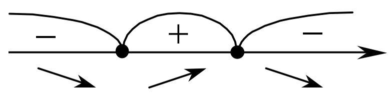
2) Находим производную функции и ее критические точки:

$$y' = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = (2x - x^2) \cdot e^{-x};$$

$$y' = 0: \ 2x - x^2 = 0, \ \Rightarrow \ x = 0, \ x = 2;$$

$y' \nexists$: таких точек нет.

3) Определяем знак y':



Таким образом,

$x = 0$ – точка минимума функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$,

$x = 2$ – точка максимума функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$,

$$y_{\min} = y(0) = 0, \quad y_{\max} = y(2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0{,}54.$$

Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в критической точке x_0, то справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4 (второе достаточное условие экстремума функции). *Пусть x_0 – внутренняя точка области определения функции $f(x)$ и $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, причем*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда: 1) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 является точкой минимума функции $f(x)$;

2) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 является точкой максимума функции $f(x)$;

3) если n – нечетное, то x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Замечание. На практике пользоваться вторым достаточным условием экстремума функции менее удобно, чем первым. Это связано с тем, что 1) не всегда легко вычислить $f^{(n)}(x_0)$; 2) поведение функции (возрастание и убывание) определяется не на всех интервалах области определения. Но иногда, все же лучше применить второе достаточное условие. Например, если критических точек бесконечно много.

ПРИМЕР. Найти экстремумы функции $y = \cos^2 x$.

РЕШЕНИЕ

1) Находим область определение функции:

$$D(y) = \mathbb{R}.$$

2) Находим производную функции и ее критические точки:

$$y' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x;$$

$$y' = 0: \ -\sin 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}k, \ \ k \in \mathbb{Z};$$

$y' \nexists$: таких точек нет.

3) Находим вторую производную функции и вычисляем ее в критических точках:

$$y'' = -2\cos 2x,$$

$$y''\left(\frac{\pi k}{2}\right) = -2\cos(\pi k) = \begin{cases} -2, & k = 2n; \\ 2, & k = 2n-1. \end{cases}$$

Таким образом, функция $y = \cos^2 x$ имеет максимумы в точках

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot 2n = \pi n \ \ (n \in \mathbb{Z}), \ \ y_{\max} = y(\pi n) = 1;$$

и имеет минимумы в точках

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1) = \pi n + \frac{\pi}{2} \ \ (n \in \mathbb{Z}), \ \ y_{\min} = y\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = -1.$$