Классификация вещественных функций вещественного аргумента

1) Вещественные функции вещественного аргумента делят на два класса: *элементарные* и *не элементарные*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой* $y = f(x)$, *где* $f(x)$ *– выражение, составленное из основных элементарных функций и действительных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.*

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

- степенная функция $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;
- показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$;
- тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$;
- обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

2) Элементарные функции делят на два класса: *алгебраические* и *трансцендентные*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция называется алгебраической, если ее значение можно получить из аргумента и действительных чисел с помощью конечного числа алгебраических операций (т.е. сложения, вычитания, умножения, деления) и возведения в степень с рациональным показателем. Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной.*

3) Алгебраические функции делят на рациональные и иррациональные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Алгебраическая функция называется рациональной, если среди действий, которые производятся над независимой переменной, отсутствует извлечение корня. Функция не являющаяся рациональной называется иррациональной.*

Рациональные функции бывают двух видов:

- целые рациональные (многочлены) $y = P_n(x)$,
  где $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$;
- дробные рациональные (рациональные дроби) $y = \dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$.

Основные характеристики поведения функции

Изучить функцию – это значит охарактеризовать ход ее изменения (как говорят «ее поведение») при изменении независимой переменной.

Для характеристики поведения функции используют следующие ее свойства.

1) **Четность функции.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $y = f(x)$ *называется четной, если выполняются два условия:*

а) область определения функции симметрична относительно начала координат;

б) для любого x *из области определения справедливо равенство*

$$f(-x) = f(x).$$

Функция $y = f(x)$ *называется нечетной, если выполняются два условия:*

а) область определения функции симметрична относительно начала координат;

б) для любого x *из области определения справедливо равенство*

$$f(-x) = -f(x).$$

Функция, не являющаяся четной или нечетной, называется функцией общего вида.

Из определения четной и нечетной функции следует, что график четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2) **Периодичность**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $y = f(x)$, *определенная на множестве* D, *называется периодической, если существует число* $t \neq 0$ *такое, а) что для любого* $x \in D$ *значения* $x + t$ *и* $x - t$ *тоже принадлежат* D; *б)* $f(x \pm t) = f(x)$. Число t при этом называют *периодом функции*.

Если функция $y = f(x)$ периодическая на множестве D и $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$ на D, то для нее существует наименьший положительный период T и любой период этой функции имеет вид kT, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. T называют *основным периодом функции* $f(x)$.

Очевидно, что график периодической функции состоит из повторяющихся фрагментов.

3) **Монотонность**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $y = f(x)$ *называется возрастающей (неубывающей) на интервале* $(a; b)$ *если для любых* $x_1, x_2 \in (a; b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *значения функции* $f(x_1)$ *и* $f(x_2)$ *удовлетворяют неравенству* $f(x_1) < f(x_2)$ *(*$f(x_1) \le f(x_2)$*).*

Функция $y = f(x)$ *называется убывающей (невозрастающей) на интервале* $(a; b)$ *если для любых* $x_1, x_2 \in (a; b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *значения функции* $f(x_1)$ *и* $f(x_2)$ *удовлетворяют неравенству* $f(x_1) > f(x_2)$ *(*$f(x_1) \ge f(x_2)$*).*

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются *монотонными.*

4) **Ограниченность**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $y = f(x)$ *называется ограниченной снизу, если существует* $a \in \mathbb{R}$ *такое, что* $a \le f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

Функция $y = f(x)$ *называется ограниченной сверху, если существует* $b \in \mathbb{R}$ *такое, что* $f(x) \le b$, $\forall x \in D(f)$.

Функция, ограниченная сверху и снизу, называется *ограниченной*.

Если функция $y = f(x)$ ограничена, то существует $M > 0$ такое, что $|f(x)| \le M$, $\forall x \in D(f)$.

Действительно, если $y = f(x)$ ограничена, то она ограничена сверху и снизу. Значит, существуют $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$a \le f(x) \le b, \ \forall x \in D(f).$$

Обозначим через M $\max\{|a|,|b|\}$[1]. Тогда $-M \le a$ и $b \le M$. Следовательно,

$$-M \le f(x) \le M, \ \forall x \in D(f),$$

или

$$|f(x)| \le M, \ \forall x \in D(f).$$

[1] $\max\{|a|,|b|\}$ обозначает наибольшее из чисел $|a|$ и $|b|$.