

Математический анализ
Раздел: Функция нескольких переменных

Тема: *Формула Тейлора для ФНП.
Экстремумы ФНП*

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

§18. Формула Тейлора для ФНП

Если $y = f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то справедлива формула (3):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \beta_n(x - x_0)^n,$$

где $\beta_n(x_0, x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Формулу (3) называют **формулой Тейлора разложения функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$ (в окрестности точки x_0).**

Сумму

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называют **многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.**

Слагаемое $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n$ называют **остаточным членом формулы Тейлора.**

Остаточный член R_n можно записать в нескольких формах:

1) $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ – **форма Пеано**;

2) если $y = f(x)$ $n + 1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то R_n можно записать в **форме Лагранжа** :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

где c – точка между x_0 и x .

Если c – точка между x_0 и x , то $\exists \theta \in (0; 1)$ такое, что
 $c = x_0 + \theta \cdot \Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$.

$\Rightarrow$ Остаточный член в форме Лагранжа примет вид:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!} \cdot \Delta x^{n+1}.$$

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то она примет вид (4):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Формулу (4) называют **формулой Маклорена**.

Заметим, что

$$f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n = f^{(n)}(x_0) \cdot (\Delta x)^n = d^n f(x_0).$$

Следовательно, формулу (3) можно записать в виде (5):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!}.$$

Формулу (5) можно обобщить на случай ФНП.

Пусть $z = f(x, y)$ $n + 1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности U точки $M_0(x_0, y_0)$.

Тогда, как и в случае функции $y = f(x)$, справедлива формула

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(M_0)}{n!} + R_n, \quad (5)$$

где $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U$,

$$R_n = \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

(или $R_n = o(\rho^n)$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$).

Формулу (5) называют **формулой Тейлора для функции $z = f(x, y)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ (по степеням $(x - x_0), (y - y_0)$).**

Сумму

$$f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(M_0)}{n!}$$

называют *многочленом Тейлора функции $f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$* .

Слагаемое R_n называют *остаточным членом формулы Тейлора функции $f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$* в форме Лагранжа (Пеано).

Аналогичный вид имеет формула Тейлора для функций большего числа переменных

§19. Понятие квадратичной формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многочлен n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в котором все члены имеют одинаковую степень, называется **однородным** или **формой**.

ПРИМЕРЫ.

$$1) f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 - 5x_3$$

– однородный 1-й степени (линейная форма);

$$2) f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$$

– однородный 2-й степени (**квадратичная форма**);

$$3) f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - 4x_2^3$$

– однородный 3-й степени.

Общий вид квадратичной формы:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ & + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \\ & + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n. \end{aligned}$$

Будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Тогда квадратичную форму можно записать в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **положительно (отрицательно)** определенной если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \quad [f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0]$$

для любых, не равных одновременно нулю, значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются **знакоопределенными**.

Если квадратичная форма может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то она называется **неопределенной**.

Симметрическая матрица из коэффициентов квадратичной формы, т.е. матрица вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей квадратичной формы**.

Главными угловыми минорами квадратной матрицы $C = (c_{ij})$ называются ее миноры вида

$$c_{11}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} \quad \text{и т.д.}$$

ТЕОРЕМА 1 (критерий Сильвестра).

- 1) Квадратичная форма положительно определена $\Leftrightarrow$ все главные угловые миноры ее матрицы – положительные.
- 2) Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow$ знаки главных угловых миноров ее матрицы чередуются, начиная с минуса, т.е.

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \quad \text{и т.д.}$$

§20. Экстремумы ФНП

Пусть $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $D \subseteq xOy$,
 $M_0(x_0, y_0) \in D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой максимума** функции $f(x, y)$, если $\forall M(x, y) \in U(M_0, \delta)$ выполняется неравенство
$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой минимума** функции $f(x, y)$, если $\forall M(x, y) \in U(M_0, \delta)$ выполняется неравенство
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Точки максимума и минимума функции называются ее **точками экстремума**.

Значения функции в точках максимума и минимума называются соответственно **максимумами** и **минимумами** (**экстремумами**) этой функции.

Замечания.

1) По смыслу точкой максимума (минимума) функции $f(x,y)$ могут быть только внутренние точки области D .

2) Если $\forall M(x,y) \in U^*(M_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) < f(x_0,y_0) \quad [\quad f(x,y) > f(x_0,y_0) \quad],$$

то точку M_0 называют **точкой строгого максимума** (соответственно **точкой строгого минимума**) функции $f(x,y)$.

Определенные в 1 точки максимума и минимума называют иногда точками **нестрогого максимума** и **минимума**.

3) Понятия экстремумов носят локальный характер. В рассматриваемой области функция может совсем не иметь экстремумов, может иметь несколько (в том числе бесчисленно много) минимумов и максимумов. При этом некоторые минимумы могут оказаться больше некоторых ее максимумов.

ТЕОРЕМА 1 (необходимые условия экстремума).

Если функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю, либо хотя бы одна из них не существует.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы 1.

Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то касательная плоскость к графику этой функции в точке $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ либо параллельна плоскости xOy , либо вообще не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Точки, в которых обе частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, называются **стационарными точками** функции $z = f(x, y)$.

Точки, удовлетворяющие условиям теоремы 1, называются **критическими точками** функции $z = f(x, y)$.

Пусть $z = f(x, y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$,

$$M_0(x_0, y_0) \in D.$$

Пусть $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в окрестности U точки M_0 и M_0 – критическая точка для $z = f(x, y)$. Тогда

1) $\forall M \in U$

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + R_2,$$

где $R_2 = o(\rho^2)$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$;

$$2) f'_x(M_0) = 0, \quad f'_y(M_0) = 0$$

$$\Rightarrow df(M_0) = 0 \quad \text{и} \quad f(M) = f(M_0) + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + R_2,$$

$$\Rightarrow \Delta f(M_0) \approx \frac{d^2 f(M_0)}{2!},$$

Получили, что знак $\Delta f(M_0)$ и $d^2 f(M_0)$ совпадает.

Следовательно, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия экстремума функции n переменных).

Пусть M_0 – стационарная точка функции $z = f(M)$ и в некоторой окрестности точки M_0 функция $f(M)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка.

Тогда

- 1) $f(M)$ имеет в точке M_0 максимум, если квадратичная форма $d^2f(M_0)$ отрицательно определена ;
- 2) $f(M)$ имеет в точке M_0 минимум, если квадратичная форма $d^2f(M_0)$ положительно определена ;
- 3) если квадратичная форма $d^2f(M_0)$ является неопределенной, то M_0 не является точкой экстремума;
- 4) если $d^2f(M_0) \geq 0$ или $d^2f(M_0) \leq 0$ (т.е. среди главных угловых миноров имеются нулевые), то никакого заключения о критической точке M_0 сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.

Если $z = f(x, y)$, то $d^2f(M_0)$ – квадратичная форма с матрицей

$$\begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{pmatrix}$$

Тогда:

1) Квадратичная форма $d^2f(M_0)$ отрицательно определена если

$$f''_{xx}(M_0) < 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0;$$

2) Квадратичная форма $d^2f(M_0)$ положительно определена если

$$f''_{xx}(M_0) > 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0.$$

ТЕОРЕМА 3 (достаточные условия экстремума функции ДВУХ переменных).

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – критическая точка функции $z = f(x, y)$ и в некоторой окрестности точки M_0 функция имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно.

Обозначим

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Тогда

- 1) если $A \cdot C - B^2 < 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ не является точкой экстремума;*
- 2) если $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A > 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет минимум;*
- 3) если $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет максимум;*
- 4) если $A \cdot C - B^2 = 0$, то никакого заключения о критической точке $M_0(x_0, y_0)$ сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.*

Замечание.

Если с помощью теоремы 3 исследовать критическую точку $M_0(x_0, y_0)$ не удалось, то ответ на вопрос о наличии в M_0 экстремума даст знак $\Delta f(x_0, y_0)$:

а) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем

$$\Delta f(x_0, y_0) < 0,$$

то $M_0(x_0, y_0)$ – точка строгого максимума;

б) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем

$$\Delta f(x_0, y_0) > 0,$$

то $M_0(x_0, y_0)$ – точка строгого минимума.

В случае нестрогих экстремумов при некоторых значениях Δx и Δy приращение функции будет нулевым