

Математический анализ
Раздел: Дифференциальное исчисление

Тема: *Исследование функций*
(выпуклость и вогнутость кривой,
асимптоты кривой)

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

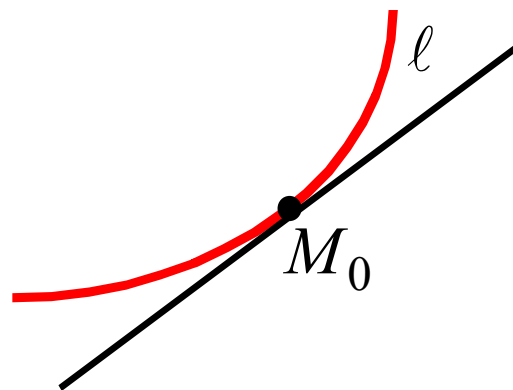
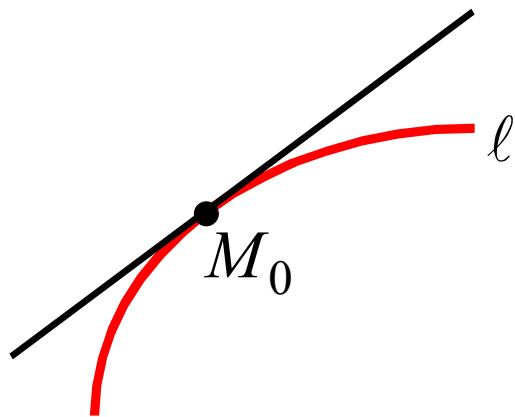
3. Выпуклость и вогнутость кривой.

Точки перегиба

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть ℓ – кривая, M_0 – точка кривой, причем в M_0 существует не вертикальная касательная к ℓ .

Кривую ℓ называют **выпуклой в точке M_0** , если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит ниже касательной, проведенной к ℓ в точке M_0 .

Кривую ℓ называют **вогнутой в точке M_0** , если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит выше касательной, проведенной к ℓ в точке M_0 .



Точки кривой, которые разделяют ее выпуклые и вогнутые участки, называются **точками перегиба** кривой.

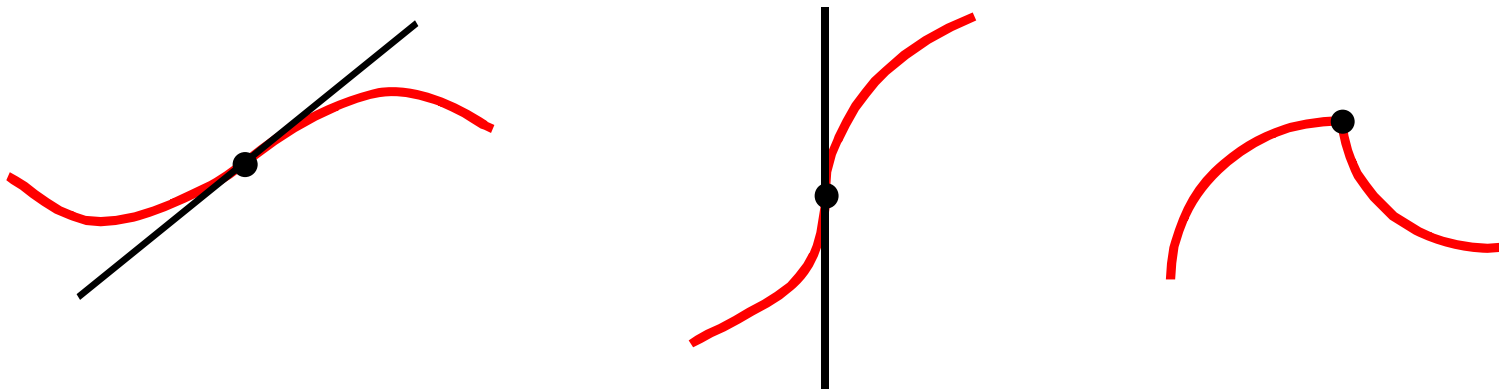
Замечания.

1) Выпуклость и вогнутость кривой в точке — локальные понятия.

Они определяют относительное расположение точек кривой и касательной вблизи точки касания.

В точках, удаленных от точки касания, кривая и касательная могут располагаться произвольным образом.

2) В точке перегиба касательная к кривой (если она существует) пересекает кривую (кривая переходит с одной стороны касательной на другую).



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кривая $y = f(x)$ называется **выпуклой** (**вогнутой**) **на интервале $(a;b)$** если $\forall x \in (a;b)$ кривая выпукла (вогнута) в соответствующей точке $M(x ; f(x))$.

Замечания.

- 1) Если $M_0(x_0 ; f(x_0))$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$, то x_0 – внутренняя точка области определения функции $f(x)$.
- 2) Точками перегиба кривой $y = f(x)$ часто называют точки, которые разделяют интервалы выпуклости и вогнутости этой кривой (т.е. абсциссы точек перегиба кривой $y = f(x)$).

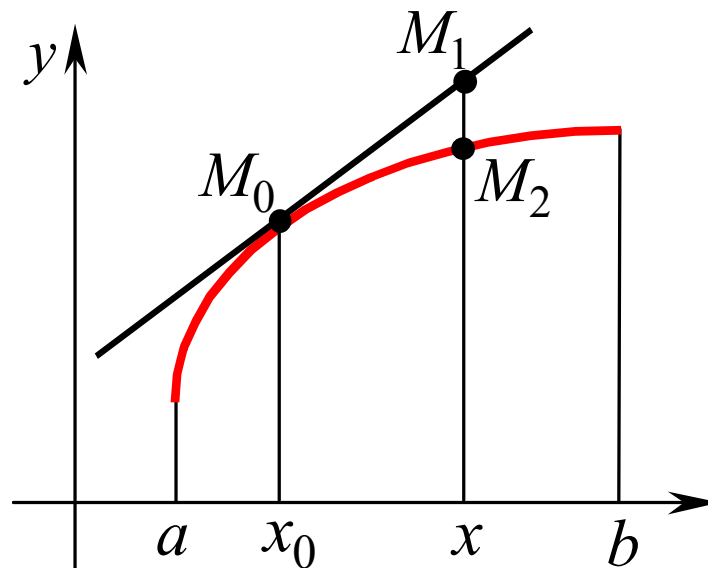
ТЕОРЕМА 5 (необходимое и достаточное условия выпуклости (вогнутости) графика функции).

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда:

1) если кривая $y = f(x)$ выпукла (вогнута) на интервале $(a;b)$,
то $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$), $\forall x \in (a;b)$
(необходимое условие выпуклости (вогнутости) графика);

2) если $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) $\forall x \in (a;b)$,
то кривая $y = f(x)$ выпукла (вогнута) на интервале $(a;b)$
(достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточного условия



СЛЕДСТВИЕ 6 (необходимое условие перегиба кривой $y = f(x)$).

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в $U(x_0, \delta)$ (или в $U^(x_0, \delta)$).*

Если $M_0(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет второй производной.

Замечание. Точки, в которых вторая производная функции $y = f(x)$ обращается в ноль или имеет разрыв, называют иногда **критическими точками II рода функции $y = f(x)$** (или **критическими точками функции $y = f(x)$ по второй производной**).

ТЕОРЕМА 7 (достаточное условие перегиба кривой $y = f(x)$).

Пусть x_0 – внутренняя точка $D(f)$ и функция $f(x)$ дважды дифференцируема в $U^(x_0, \delta)$.*

Если при переходе через точку x_0 функция $f''(x)$ меняет знак, то точка $M_0(x_0 ; f(x_0))$ является точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

4. Асимптоты кривой

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Прямая ℓ называется **асимптотой** кривой, если при неограниченном удалении точки M кривой от начала координат расстояние от точки M до прямой ℓ стремится к нулю.

Замечание.

Выделяют два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты кривая $y = f(x)$ не пересекает (почему?), наклонные – может пересекать.

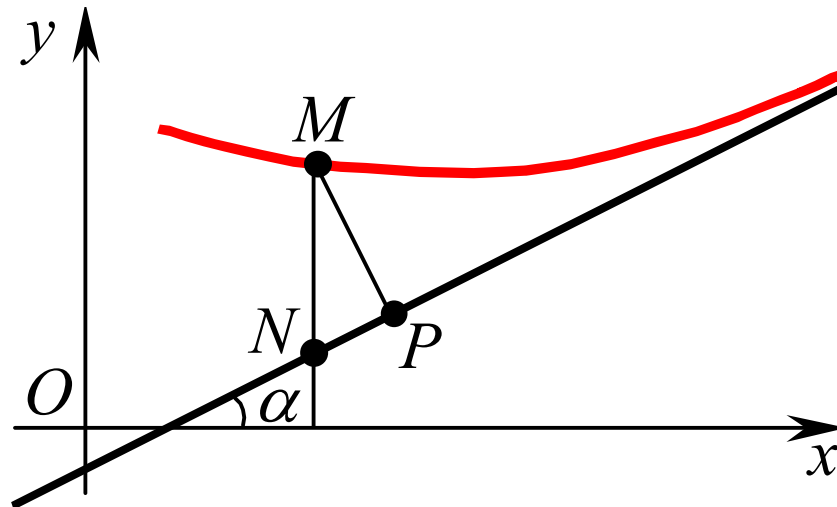
ТЕОРЕМА 8 (необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты кривой $y = f(x)$).

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой кривой $y = f(x) \Leftrightarrow$ существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$$

$$(\text{или} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = b \quad).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Замечания.

- 1) Из теоремы 8 следует, что график функции $y = f(x)$ может иметь наклонную асимптоту только если функция определена в окрестности $+\infty$ или $-\infty$.

Причем, наклонных асимптот у кривой $y = f(x)$ может быть не более двух: для правой ветви (т.е. при $x \rightarrow +\infty$) и для левой ветви (т.е. при $x \rightarrow -\infty$).

- 2) Если $\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} f(x) = b$,

то наклонная асимптота имеет уравнение $y = b$, т.е. является **горизонтальной**.

ТЕОРЕМА 9 (необходимое и достаточное условие существования вертикальной асимптоты кривой $y = f(x)$).

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x) \Leftrightarrow$ точка $x = a$ является точкой разрыва II рода функции $y = f(x)$, причем, хотя бы один из односторонних пределов $f(a - 0)$, $f(a + 0)$ равен бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

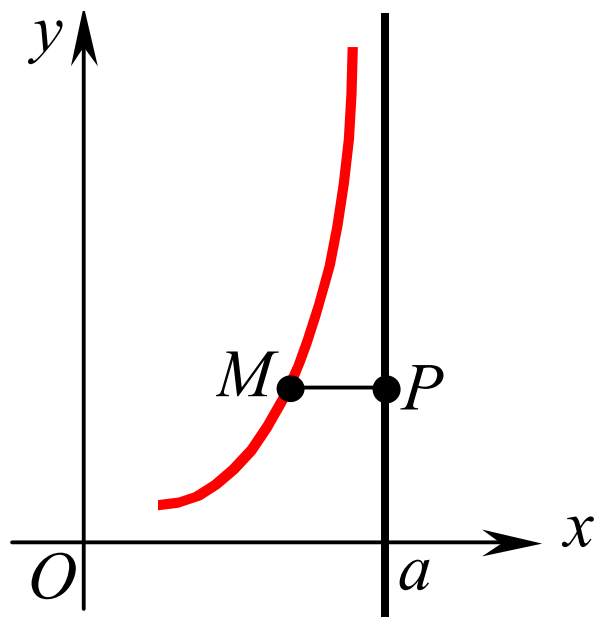


СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать четность и периодичность функции.
3. Исследовать точки разрыва, найти вертикальные асимптоты.
4. Найти наклонные асимптоты (если их существование возможно).
5. Найти точки пересечения графика с осями координат.
6. Найти $f'(x)$. Определить точки экстремума, интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти $f''(x)$. Определить точки перегиба графика, интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить график функции.