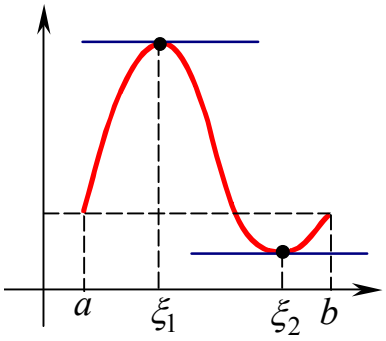
§8. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Знание производной функции $f'(x)$ часто позволяет делать некоторые выводы о поведении самой функции $y = f(x)$. Они являются следствиями следующих теорем, которые получили название основных теорем дифференциального исчисления.

ТЕОРЕМА 1 (Ролля). *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$. *Если значения функции на концах отрезка равны, т.е.* $f(a) = f(b)$, *то существует хотя бы одна точка* $\xi \in (a; b)$ *такая, что* $f'(\xi) = 0$.

Теорема Ролля имеет очень простой ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. А именно, *если функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме* 1 *условиям, то на интервале* $(a; b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна оси* Ox.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то по теореме Вейерштрасса она принимает на $[a; b]$ свое наибольшее значение M и наименьшее значение m. Т. е. существуют $x_1, x_2 \in [a; b]$ такие, что

$$M = f(x_1) \geq f(x), \quad \forall x \in [a; b],$$
$$m = f(x_2) \leq f(x), \quad \forall x \in [a; b].$$

Для чисел M и m имеются две возможности: $M = m$ и $M \neq m$. Рассмотрим их.

1) Пусть $M = m$. Так как $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a; b]$, то в этом случае получаем

$$f(x) = m = M, \quad \forall x \in [a; b].$$

Т.е. функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ сохраняет постоянное значение и, следовательно, в любой точке интервала $(a; b)$ ее производная равна нулю. В этом случае за ξ можно взять любую точку интервала $(a; b)$.

2) Пусть $M \neq m$. Так как значения функции на концах отрезка равны, то хотя бы одно из значений M или m функция принимает во внутренней точке отрезка $[a; b]$, т.е. либо $x_1 \in (a; b)$, либо $x_2 \in (a; b)$. Пусть,

например, $x_1 \in (a; b)$. Покажем, что x_1 и будет искомой точкой ξ, т.е. что $f'(x_1) = 0$.

Действительно, т.к. M – наибольшее значение функции на $[a; b]$, то для любого Δx

$$\Delta f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \le 0$$

(при этом предполагается, что $x_1 + \Delta x \in [a; b]$).

Тогда $$\frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} \le 0, \text{ если } \Delta x > 0$$

и $$\frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} \ge 0, \text{ если } \Delta x < 0.$$

Так как по условию производная функции $f(x)$ в точке x_1 существует, то существуют $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x}$, причем имеет место равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Но $$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} \ge 0 \text{ (так как } \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} \ge 0, \text{ если } \Delta x < 0)$$

а $$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} \le 0 \text{ (так как } \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} \le 0, \text{ если } \Delta x > 0).$$

Следовательно, равенство (1) возможно только если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} = 0.$$

Итак, мы доказали, что если $x_1 \in (a; b)$, то $f'(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} = 0$, т.е. x_1 и есть искомая точка ξ. ■

ТЕОРЕМА 2 (Лагранжа). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a; b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \qquad (2)$$

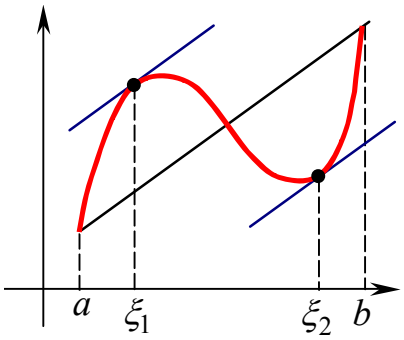
Выясним ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы Лагранжа. Пусть $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ – граничные точки кривой $y = f(x)$. Запишем уравнение секущей AB:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)},$$

$$\Rightarrow \quad y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

$$\Rightarrow \quad y = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{k}(x - a) + f(a).$$

Итак получили, что отношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB. Следовательно, *если функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме* 2 *условиям, то на интервале* $(a; b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна секущей* AB.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет на $[a; b]$ условиям теоремы Ролля. Действительно,

1) $F(x)$ непрерывна на $[a; b]$ (как сумма непрерывных на $[a; b]$ функций);
2) $F(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ (как сумма дифференцируемых на $(a; b)$ функций);
3) $F(b) = F(a) = 0$.

Следовательно, по теореме Ролля, существует хотя бы одна точка $\xi \in (a; b)$ такая, что $F'(\xi) = 0$. Но

$$F'(x) = f'(x) - \big(f(a)\big)' - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)' = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$\Rightarrow \quad F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \blacksquare$$

Замечание. Формулу (2) можно переписать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) \tag{3}$$

Формулу (3) называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений.***

СЛЕДСТВИЕ теоремы Лагранжа. *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a; b)$. *Функция* $f(x)$ *принимает на отрезке* $[a; b]$ *постоянное значение* C *тогда и только тогда, когда* $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a; b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Необходимость $(\Rightarrow)$.

Имеем: $f(x) = C$, $\forall x \in [a; b]$.

Тогда $f'(x) = C' = 0$, $\forall x \in (a; b)$

(см. правила дифференцирования).

2) Достаточность $(\Leftarrow)$.

Имеем: $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a; b)$.

Докажем, что $f(x) = C$, $\forall x \in [a; b]$.

Пусть $x_1, x_2 \in [a; b]$, $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1; x_2]$ функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Следовательно, существует хотя бы одна точка $\xi \in (x_1; x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$

Но по условию $f'(\xi) = 0$. Следовательно,

$$f(x_2) - f(x_1) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) = f(x_1), \quad \forall x_1, x_2 \in [a; b],$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = C, \quad \forall x \in [a; b]. \quad \blacksquare$$

ТЕОРЕМА 3 (Коши). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируемы на интервале* $(a; b)$, *причем* $\varphi'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a; b)$. *Тогда существует хотя бы одна точка* $\xi \in (a; b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Докажем сначала, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$.

Предположим противное. Пусть $\varphi(b) - \varphi(a) = 0$.

$$\Rightarrow \quad \varphi(b) = \varphi(a).$$

Тогда, по теореме Ролля, существует хотя бы одна точка $\eta \in (a; b)$ такая, что $f'(\eta) = 0$. Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение неверно и $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$.

2) Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\big(\varphi(x) - \varphi(a)\big).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет на $[a; b]$ условиям теоремы Роля. Действительно,

1) $F(x)$ непрерывна на $[a; b]$ (как сумма непрерывных на $[a; b]$ функций);
2) $F(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ (как сумма дифференцируемых на $(a; b)$ функций);
3) $F(b) = F(a) = 0$.

Следовательно, по теореме Ролля, существует хотя бы одна точка $\xi \in (a; b)$ такая, что $F'(\xi) = 0$.

Но
$$F'(x) = f'(x) - \big(f(a)\big)' - \left(\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(x) - \varphi(a))\right)',$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(x),$$

$$\Rightarrow \quad F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(\xi) = 0,$$

и, так как $\varphi'(\xi) \neq 0$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \quad \blacksquare$$