

Математический анализ
Раздел: Введение в анализ

Тема: *Предел функции*

(предел функции и его свойства, бесконечно большие функции и их свойства)

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

§3. Предел функции

1. Определение предела функции по Гейне и по Коши

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

$U^*(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ – **проколота окрестность точки** x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (по Коши, на языке ε - δ).

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0** (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что
если $x \in U^*(x_0, \delta)$, то $f(x) \in U(A, \varepsilon)$.

Замечание.

1) Условие $x \in U^*(x_0, \delta)$ означает, что для x выполняется неравенство:

а) $0 < |x - x_0| < \delta$, если $x_0 \in \mathbb{R}$;

б) $|x| > 1/\delta$, если $x_0 = \infty$;

в) $x > 1/\delta$, если $x_0 = +\infty$;

г) $x < -1/\delta$, если $x_0 = -\infty$.

2) Условие $f(x) \in U(A, \varepsilon)$ означает, что для $f(x)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (по Гейне, на языке последовательностей).

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0** , если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0 , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A .

ТЕОРЕМА 1. Определение предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

Обозначают: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $f(x) \rightarrow A$, при $x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$ стремится к A при x стремящемся к x_0 ».

2. Свойства пределов

Из свойств сходящихся последовательностей и определения предела функции по Гейне получаем, что справедливы следующие утверждения.

- 1) Если функция имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то он единственный.
- 2) Если $f(x) \rightarrow A$, то $|f(x)| \rightarrow |A|$.
- 3) Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (говорят: *функция локально ограничена*)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$

4) ЛЕММА 2 (о роли бесконечно малых функций).

Число $A \in \mathbb{R}$ является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0 \iff f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

5) Пусть $f(x)$ – ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$. Тогда $f(x) \cdot \alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

6) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел при $x \rightarrow x_0$.

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже имеют предел при $x \rightarrow x_0$, причем

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \right)$$

Следствие свойства 6. Если $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то

$\forall c \in \mathbb{R}$ функция $c \cdot f(x)$ тоже имеет предел при $x \rightarrow x_0$, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Говорят: «константу можно вынести за знак предела».

Замечание. Свойство 6 и его следствие обычно называют теоремами о пределах.

7) Пусть $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$ и $\exists \delta > 0$ такое, что $f(x) \geq 0$ (или $f(x) > 0$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$

8) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow x_0$ и $\exists \delta > 0$ такое, что $f(x) \geq g(x)$ (или $f(x) > g(x)$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

9) ЛЕММА 3 (о двух милиционерах).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый предел при $x \rightarrow x_0$ и $\exists \delta > 0$ такое, что $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда функция $\varphi(x)$ тоже имеет предел при $x \rightarrow x_0$, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

10) Пусть $f: X \rightarrow Y$, $\varphi: Y \rightarrow Z$ и существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = z_0$$

Тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$,
причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = z_0 \quad (1)$$

Формула (1) называется *формулой замены переменной в пределе*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Бесконечно большие функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (на языке M - δ , на языке окрестностей).

Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$** (в точке x_0), если $\forall M > 0 \exists \delta > 0$ такое, что
если $x \in U^*(x_0, \delta)$, то $|f(x)| > M$.

Замечание. Условие $|f(x)| > M$ означает, что $f(x) \in U(\infty, 1/M)$.

$\Rightarrow$ Записывают: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $f(x) \rightarrow \infty$, при $x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$ стремится к ∞ при $x \rightarrow x_0$ »

«предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ равен ∞ ».

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (на языке последовательностей).

Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$** , если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0 , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к ∞ .

ТЕОРЕМА 4. Определение бесконечно большой функции на языке M - δ и на языке последовательностей – эквивалентны.

Частные случаи бесконечно больших функций:

1) $f(x)$ – б.б. при $x \rightarrow x_0$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $|f(x)| = f(x) > M$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$

Записывают: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow x_0$ »
«предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ равен $+\infty$ ».

2) $f(x)$ – б.б. при $x \rightarrow x_0$ и $f(x) \leq 0$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $|f(x)| = -f(x) > M$

$\Rightarrow f(x) < -M$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$

Записывают: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \rightarrow x_0$ »
«предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ равен $-\infty$ ».

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ

- 1) Если $f(x) - \text{б.б.}$ при $x \rightarrow x_0$, то функция $1/f(x) - \text{б.м.}$ при $x \rightarrow x_0$.
Если $\alpha(x) - \text{б.м.}$ при $x \rightarrow x_0$, то функция $1/\alpha(x) - \text{б.б.}$ при $x \rightarrow x_0$.
(связь бесконечно больших и бесконечно малых)
- 2) Если $f(x)$ и $g(x) - \text{б.б.}$ функции одного знака, то их сумма $f(x) + g(x) - \text{б.б.}$ того же знака.
- 3) Если $f(x) - \text{б.б.}$ при $x \rightarrow x_0$, $g(x) - \text{ограниченна}$ в некоторой окрестности $U^*(x_0, \delta)$, то их сумма $f(x) + g(x) - \text{б.б.}$ при $x \rightarrow x_0$.
- 4) Если $f(x)$ и $g(x) - \text{б.б.}$ при $x \rightarrow x_0$, то их произведение $f(x) \cdot g(x) - \text{тоже б.б.}$ при $x \rightarrow x_0$.

5) Если $f(x)$ – б.б. при $x \rightarrow x_0$, $g(x)$ – имеет предел при $x \rightarrow x_0$,
причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \neq 0$$

то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ – б.б. при $x \rightarrow x_0$.

6) Если $f(x)$ – б.б. при $x \rightarrow x_0$ и $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ имеет место
неравенство $|f(x)| < |g(x)|$ ($|f(x)| \leq |g(x)|$),
то функция $g(x)$ тоже является б.б. при $x \rightarrow x_0$.

7) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б.б. одного знака при $x \rightarrow x_0$ и $\exists \delta > 0$ такое,
что $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.
Тогда функция $\varphi(x)$ тоже является б.б. того же знака при
 $x \rightarrow x_0$.

(лемма о двух милиционерах для б.б. функций)