Задача. Найти $I(\lambda)=\int\limits_0^{\lambda}\frac{\ln(1+\lambda x)}{1+x^2}dx \quad (\lambda\ge 0)$

РЕШЕНИЕ

Используя формулу

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx+f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y)$$

находим

$$I'(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\left(\int\limits_0^{\lambda}\frac{\ln(1+\lambda x)}{1+x^2}dx\right)=\int\limits_0^{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\ln(1+\lambda x)}{1+x^2}\right)dx+\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}\cdot 1-0=$$

$$=\int\limits_0^{\lambda}\frac{x}{(1+x^2)(1+\lambda x)}dx+\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}.$$

Разложим дробь $\frac{x}{(1+x^2)\cdot(1+\lambda x)}$ на сумму простейших:

$$\frac{x}{(1+x^2)\cdot(1+\lambda x)}=\frac{A}{1+\lambda x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

$$\Rightarrow\quad x=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+\lambda x),$$

$$\Rightarrow\quad x=x^2(A+\lambda B)+x(B+\lambda C)+(A+C),$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} A+\lambda B &= 0,\\ B+\lambda C &= 1,\\ A+C &= 0;\end{cases}\quad\Rightarrow\quad A=-\frac{\lambda}{1+\lambda^2},\ B=\frac{1}{1+\lambda^2},\ C=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{\lambda}\frac{x}{(1+x^2)(1+\lambda x)}dx=\frac{-\lambda}{1+\lambda^2}\cdot\int\limits_0^{\lambda}\frac{dx}{1+\lambda x}+\frac{1}{1+\lambda^2}\int\limits_0^{\lambda}\frac{x+\lambda}{1+x^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{1+\lambda^2}\cdot\ln\left|1+\lambda x\right|\Big|_0^{\lambda}+\frac{1}{1+\lambda^2}\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\lambda arctgx\right)\Big|_0^{\lambda}=$$

$$=-\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}+\frac{1}{1+\lambda^2}\left(\frac{1}{2}\ln(1+\lambda^2)+\lambda arctg\lambda\right).$$

Следовательно,

$$I'(\lambda)=-\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}+\frac{1}{1+\lambda^2}\left(\frac{1}{2}\ln(1+\lambda^2)+\lambda arctg\lambda\right)+\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2},$$

$$\Rightarrow\quad I'(\lambda)=\frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}+\frac{\lambda arctg\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Зная $I'(\lambda)$, найдем $I(\lambda)$:

$$I(\lambda)=\int I'(\lambda)d\lambda=\int\frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}d\lambda+\int\frac{\lambda arctg\lambda}{1+\lambda^2}d\lambda .$$

К первому интегралу применим формулу интегрирования по частям:

$$u=\ln(1+\lambda^2),\quad du=\frac{2\lambda d\lambda}{1+\lambda^2};$$

$$dv=\frac{d\lambda}{1+\lambda^2},\qquad v=arctg\lambda .$$

$$\Rightarrow\quad I(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\ln(1+\lambda^2)\cdot arctg\lambda-\int\frac{2\lambda arctg\lambda}{1+\lambda^2}d\lambda\right)+\int\frac{\lambda arctg\lambda}{1+\lambda^2}d\lambda=$$

$$I(\lambda)=\frac{1}{2}\cdot\ln(1+\lambda^2)\cdot arctg\lambda+C .$$

Найдем значение константы C. Имеем

$$I(0)=\int_0^0\frac{\ln(1+0\cdot x)}{1+x^2}dx=0$$

и

$$I(0)=\frac{1}{2}\cdot\ln(1+0^2)\cdot arctg0+C .$$

$$\Rightarrow\quad 0=\frac{1}{2}\cdot 0+C,$$

$$\Rightarrow\quad C=0 .$$

Таким образом, получили

$$I(\lambda)=\frac{1}{2}\cdot\ln(1+\lambda^2)\cdot arctg\lambda .$$