1. $(1-x^2)y''-xy'=0$ — нет y

$\Rightarrow$ замена: $z(x)=y' \Rightarrow y''=z'$

$\Rightarrow (1-x^2)z'-xz=0$

$$\frac{dz}{z}=\frac{x\,dx}{1-x^2} \quad \Bigg| \begin{array}{l} z\neq 0 \\ 1-x^2\neq 0 \end{array}$$

$$\ln|z|=-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C_1$$

$$\Rightarrow z=\frac{C_1}{\sqrt{|1-x^2|}}, \quad C_1\neq 0$$

Возможные потери решений:

$z=0$ — решение, входит в общее при $C_1=0$

$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ — не решение

Т.О. $z=\dfrac{C_1}{\sqrt{|1-x^2|}}, \ \forall C_1$

$$\Rightarrow y'=\frac{C_1}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

$$y=\begin{cases} C_1\arcsin x+C_2, & \text{if } |x|<1 \\ C_1\ln|x+\sqrt{x^2-1}|, & \text{if } |x|>1 \end{cases}$$

Ответ: $y=\begin{cases} C_1\arcsin x+C_2, & |x|<1 \\ C_1\ln|x+\sqrt{x^2-1}|, & |x|>1 \end{cases}$

② $y'' \cdot tg y = (y')^2$ – нет x

$\Rightarrow$ замена: $y' = z(y) \Rightarrow y'' = z \cdot z'$

$\Rightarrow z \cdot z' \cdot tg y = z^2 \quad | \ z \neq 0$

$z' \, tg y = z$

$\frac{dz}{z} = ctg y \, dy$

$\ln|z| = \ln|\sin y| + C_1$

$z = C_1 \sin y \ , \ C_1 \neq 0$

Возможные потери решений:

$z=0$ – решение, входит в общее при $C_1 = 0$.

Т.О. $z = C_1 \sin y, \ \forall C_1$

$y' = C_1 \sin y \Rightarrow \frac{dy}{\sin y} = C_1 dx \quad | \sin y \neq 0$

$\Rightarrow \ln|tg \frac{y}{2}| = C_1 x + C_2$

$\Rightarrow tg \frac{y}{2} = C_2 e^{C_1 x} \ , \ C_2 \neq 0$

$y = 2(arctg \, C_2 e^{C_1 x} + \pi k)$

Возможные потери решений:

$\sin y = 0 \Rightarrow y = \pi k$ – решения

$y = 2\pi k$ – входят в общее при $C_2 = 0$

$y = (2k+1)\pi$ – потеряны

Ответ: $y = 2(arctg \, C_2 e^{C_1 x} + \pi k), \forall C_1, \forall C_2 \ ; \ y = (2k+1)\pi$

(3) $(x+6)^2 y'' + 7(x+6)y' + 5y = 0$

Полагаем $x+6 = e^t \Rightarrow t = \ln(x+6)$;

$y = (x+6)^{\lambda}$,

$\Rightarrow y' = \lambda (x+6)^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda\cdot(\lambda-1)(x+6)^{\lambda-2}$.

Из уравнения получаем:

$\lambda\cdot(\lambda-1)(x+6)^{\lambda} + 7\lambda(x+6)^{\lambda} + 5(x+6)^{\lambda} = 0 \quad \Big| : (x+6)^{\lambda}$

$\Rightarrow \lambda(\lambda-1) + 7\lambda + 5 = 0$

$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$

$\Rightarrow \tilde{y}_1(t) = e^{-t}$, $\tilde{y}_2(t) = e^{-5t}$

$\Rightarrow y_1(x) = (x+6)^{-1}$, $y_2(x) = (x+6)^{-5}$ – ф.с.р.

$\Rightarrow y = C_1(x+6)^{-1} + C_2(x+6)^{-5}$

Ответ: $y = C_1(x+6)^{-1} + C_2(x+6)^{-5}$

(4) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

1) $y'' - 2y' + y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \Rightarrow y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x$

$y_{o.o} = C_1 e^x + C_2 x e^x$

2) $y_{o.н} = C_1(x) e^x + C_2(x) \cdot x e^x$

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{x} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = e^x \cdot e^x \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = e^{2x}(1 + x - x) = e^{2x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x(1+x) \end{vmatrix} = -e^{2x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}$$

$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \Rightarrow C_1(x) = -x + C_1$

$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{x} \Rightarrow C_2(x) = \ln|x| + C_2$

$\Rightarrow y_{o.н} = (C_1 - x)e^x + (\ln|x| + C_2) x e^x$

Ответ: $y = (C_1 - x)e^x + (\ln|x| + C_2) x e^x$

⑤ $y'' - 9y = \sin 3x - 18x^2 e^{-3x}$

1) $y'' - 9y = 0$

$\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -3$

$y_1 = e^{3x}, \ y_2 = e^{-3x}$

$y_{o.o} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

2) $f_1(x) = \sin 3x \Rightarrow \lambda = 0 \pm 3i = \pm 3i$ – не хар-кий корень

$\Rightarrow y_{r1} = A\cos 3x + B\sin 3x \quad | \times (-9)$

$y_{r1}' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$

$y_{r1}'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x \quad | \times 1$

$\Rightarrow \cos 3x(-9A - 9A) + \sin 3x(-9B - 9B) = \sin 3x$

$\Rightarrow \begin{cases} -18A = 0 \\ -18B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 0, \ B = -\frac{1}{18}$

$y_{r1} = -\frac{1}{18}\sin 3x$

3) $f_2(x) = -18x^2 e^{-3x} \Rightarrow \lambda = -3 \pm 0i = -3$ – хар-кий корень, $l = 1$

$\Rightarrow y_{r2} = x(Ax^2 + Bx + C)e^{-3x} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{-3x}$

$y_{r2}' = (3Ax^2 + 2Bx + C - 3Ax^3 - 3Bx^2 - 3Cx)e^{-3x}$

$y_{r2}'' = (6Ax + 2B - 9Ax^2 - 6Bx - 3C - 9Ax^2 - 6Bx - 3C + 9Ax^3 + 9Bx^2 + 9Cx)e^{-3x}$

$\Rightarrow e^{-3x}[\cancel{x^3 \cdot 9A} + x^2(-18A + \cancel{9B}) + x(6A - 12B + \cancel{9C}) + (2B - 6C) -$

$- \cancel{9Ax^3} - \cancel{9Bx^2} - \cancel{9Cx}]e^{-3x} = -18x^2 e^{-3x}$

$\Rightarrow -18A = -18, \quad 6A - 12B = 0, \quad 2B - 6C = 0$

$A = 1 \quad B = \frac{6A}{12} = \frac{1}{2} \quad C = \frac{2B}{6} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow y_{r2} = (x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6})e^{-3x}$

Ответ: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{18}\sin 3x + (x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6})e^{-3x}$