Интегрирование иррациональностей

1. Интегралы

$$\int R(x, x^{\beta_1}, x^{\beta_2}, \ldots, x^{\beta_k})dx, \quad \int R[x, (ax+b)^{\beta_1}, (ax+b)^{\beta_2}, \ldots, (ax+b)^{\beta_k}]dx,$$

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_1}, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_k}\right]dx,$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ **– рациональные числа.**

Замены соответственно: $x = t^s$, $ax + b = t^s$, $\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1} = t^s$,

где s – общий знаменатель дробей $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$

2. Интегралы $\int x^m (a + bx^n)^p dx$**.** **(**Выражение вида $x^m (a + bx^n)^p$, где m, n, p – рациональные числа, a, b – действительные числа, называется дифференциальным биномом)

1) p – целое число. Замена: $x = t^s$.
где s – общий знаменатель m и n.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число. Замена: $a + bx^n = t^s$.
где s – знаменатель дроби p.

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое число. Замена: $\dfrac{a+bx^n}{x^n} = t^s$
где s – знаменатель дроби p.

В других случаях этот интеграл неберущийся.

3. Интегралы $\int R(x, \sqrt{a^2 \pm x^2})dx$**,** $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$**.**

Замены: 1) $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$) для $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$;

2) $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ (или $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$) для $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$;

3) $x = \dfrac{a}{\cos t}$ (или $x = \dfrac{a}{\sin t}$) для $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$.

4. Интегралы $\int \dfrac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx$**.**

Выделить полный квадрат под знаком радикала:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x\right) + c} = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt{a(x+p)^2 + s},$$

сделать замену $t = x + p$ и расписать на сумму двух интегралов.

5. Интегралы $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}$**.**

Применить «обратную подстановку» $x-\alpha=\dfrac{1}{t}$ и свести к интегралу

$$\int \frac{P_{n-1}(t)}{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}}dt,$$

где $P_{n-1}(t)$ – многочлен степени $n-1$, a_1, b_1, c_1 – некоторые числа.

6. Интегралы $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$**.**

Первый способ.

1) Выделить полный квадрат под знаком радикала:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x\right)+c}=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a^2}}=\sqrt{a(x+p)^2+s}.$$

2) Сделать замену $u=\sqrt{|a|}\cdot(x+p)$.

В результате получим один из следующих интегралов:

$$\int R(u, \sqrt{q^2 \pm u^2})du \quad \text{или} \quad \int R(u, \sqrt{x^2-q^2})du$$

(рассмотрены выше).

Второй способ.

1) Привести к сумме интегралов вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

2) Расписать каждый из интегралов по формуле:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где λ – неопределенный коэффициент, а $Q(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами.

3) Дифференцируем обе части записанного равенства и умножаем обе части получившегося выражения на $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

4) Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов слева и справа, находим коэффициенты многочлена $Q(x)$ и λ.

Таким образом, интеграл будет сведен к интегралу $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (рассмотрен выше).