

Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: *Основные понятия
теории числовых рядов*

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

Глава V. Числовые ряды

§30. Основные понятия теории числовых рядов

1. Основные определения

Пусть задана числовая последовательность $\{u_n\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называют **числовым рядом**.

При этом, члены последовательности $\{u_n\}$ называются **членами ряда** (1-м, 2-м, ..., n -м (общим членом))

Если начиная с некоторого номера N для членов ряда справедливо равенство

$$u_N = u_{N+1} = u_{N+2} = \dots = 0,$$

то ряд называют **конечным**. В противном случае ряд называется **бесконечным**.

Ряд $\sum u_n$ называют

- **знакоположительным**, если $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- **знакоотрицательным**, если $u_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- **знакопостоянным**, если он знакоположительный или знакоотрицательный;
- **знакопеременным**, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Для ряда $\sum u_n$ запишем последовательность

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad \dots$$

Числа S_1, S_2, \dots, S_n называют **частичными суммами ряда** $\sum u_n$ (1-й, 2-й, ..., n -й).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ряд $\sum u_n$ называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$.

При этом, число $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ называют **суммой ряда** $\sum u_n$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \nexists$) то говорят, что ряд $\sum u_n$ **расходится** и не имеет суммы.

Если S – сумма ряда $\sum u_n$, то записывают: $\sum u_n = S$.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РЯДОВ

1) Рассматривается в математическом анализе:

Определить, сходится или расходится заданный ряд
(говорят: «исследовать ряд на сходимость»)

2) Рассматривается в вычислительной математике:

Найти сумму сходящегося ряда.

Найти точное значение суммы S сходящегося ряда удается редко. Обычно полагают $S \approx S_n$ где n выбирают так, чтобы

$$|R_n| = |S - S_n| < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ заранее задано}).$$

Число R_n называют *остатком ряда*.

2. Основные свойства числовых рядов

ТЕОРЕМА 1.

Поведение ряда относительно сходимости не изменится, если добавить (отбросить) конечное число членов ряда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1) **Произведением ряда $\sum u_n$ на число $c \in \mathbb{R}$** называется ряд

$$\sum c \cdot u_n.$$

2) **Суммой (разностью) рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$** называется ряд

$$\sum (u_n + v_n) \quad [\sum (u_n - v_n)].$$

ОБОЗНАЧАЮТ: $c \cdot \sum u_n$ – произведение ряда на число c ;

$\sum u_n \pm \sum v_n$ – сумма (разность) рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$

ТЕОРЕМА 2 (об арифметических действиях над сходящимися рядами)

Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна U ,

ряд $\sum v_n$ сходится и его сумма равна V ,

то а) ряд $\sum c u_n$ – сходится и его сумма равна cU ($\forall c \in \mathbb{R}$);

б) ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ – сходится и его сумма равна $U \pm V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЯ теоремы 2.

1) *Если $\sum u_n$ расходится, то $\forall c \neq 0$ ($c \in \mathbb{R}$) ряд $\sum c u_n$ – тоже расходится.*

2) *Если ряд $\sum u_n$ сходится, а ряд $\sum v_n$ расходится, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ – расходится.*

ТЕОРЕМА 3 (необходимый признак сходимости ряда).

Если ряд $\sum u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ теоремы 3 (достаточное условие расходимости ряда)

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

ТЕОРЕМА 4 (закон ассоциативности для сходящихся рядов).

Пусть ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна U

Если сгруппировать члены этого ряда, НЕ ИЗМЕНЯЯ ИХ ПОРЯДКА, то полученный в результате этого ряд будет сходиться и иметь ту же сумму U .