

Математический анализ  
Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: *Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка*

(ЛНДУ, ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида)

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

## 6. Линейные неоднородные уравнения $n$ -го порядка.

### Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x). \quad (14)$$

Если известно общее решение соответствующего ЛОДУ

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0, \quad (15)$$

то можно найти и общее решение ЛНДУ (14).

Действительно, пусть  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – ф.с.р. уравнения (15).

Тогда его общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \dots + C_n \cdot y_n, \quad (16)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные.

Полагаем, что РЕШЕНИЕ ЛНДУ ПО СТРУКТУРЕ совпадает с решением соответствующего ЛОДУ, т.е. имеет вид

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2 + \dots + C_n(x) \cdot y_n, \quad (17)$$

где  $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$  – некоторые функции.

Потребуем, чтобы производные  $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  функции (17) структурно совпадали с производными функции (16), т.е. чтобы они получались из соответствующих производных функции (16) заменой констант  $C_i$  функциями  $C_i(x)$ .

Получили, что  $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$  должны удовлетворять системе

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + \dots + C_n'(x)y_n'' = 0, \\ \dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{array} \right. \quad (18)$$

(18) – система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными.

Ее определитель – определитель Вронского  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ .

Так как  $y_1, y_2, \dots, y_n$  образуют ф.с.р. однородного уравнения, то по **теореме 4 §27(2)**  $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0, \forall x \in [a; b]$ .

$\Rightarrow$  система (18) совместна и имеет единственное решение:

$$C'_i(x) = \psi_i(x), \quad (i = \overline{1, n}).$$

Откуда получаем

$$C_i(x) = \int \psi_i(x) dx = \varphi_i(x) + \tilde{C}_i,$$

где  $\tilde{C}_i$  – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения тогда имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^n (\varphi_i(x) + \tilde{C}_i) y_i. \quad (19)$$

Изложенный выше метод нахождения решения линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка получил название ***метода вариации произвольных постоянных***.

## 7. ЛНДУ $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Раскроем скобки в (19) и сгруппируем слагаемые:

$$y = \sum_{i=1}^n (\varphi_i(x) + \tilde{C}_i) y_i = \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i y_i + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) y_i.$$

Первая сумма – общее решение соответствующего ЛОДУ, вторая сумма – частное решение ЛНДУ (получается из общего решения при  $\tilde{C}_i = 0$ ).

**ТЕОРЕМА 7** (О структуре общего решения ЛНДУ).

*Общее решение ЛНДУ  $n$ -го порядка равно сумме общего решения соответствующего ему однородного уравнения и любого частного решения  $\tilde{y}(x)$  неоднородного уравнения, т.е. имеет вид*

$$y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \dots + C_n \cdot y_n + \tilde{y}(x), \quad (20)$$

где  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – ф.с.р. соответствующего ЛОДУ.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**

Пусть правая часть  $f(x)$  ЛНДУ с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_s(x) \cdot \cos \beta x + P_k(x) \cdot \sin \beta x], \quad (21)$$

где  $P_s(x), P_k(x)$  – многочлены степени  $s$  и  $k$  соответственно,  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые числа.

Функцию (21) принято называть **функцией специального вида**.

**ТЕОРЕМА 8** (о структуре частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида).

*Если правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет специальный вид (21), то частным решением уравнения является функция вида*

$$\bar{y} = x^\ell \cdot e^{\alpha x} \cdot [R_m(x) \cdot \cos \beta x + T_m(x) \cdot \sin \beta x], \quad (22)$$

*где  $R_m(x)$  и  $T_m(x)$  – многочлены степени  $m$  (неизвестные),  $m$  – большая из степеней многочленов  $P_s(x), P_k(x)$ ,  $\ell$  – кратность характеристического корня  $\alpha \pm \beta i$  ( $\ell = 0$ , если  $\alpha \pm \beta i$  не характеристический корень).*

ПРИМЕРЫ. Записать структуру частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами, если его правая часть  $f(x)$  имеет вид:

1)  $f(x) = P_s(x)$  ;

2)  $f(x) = a \cdot e^{\alpha x}$  , где  $a$  – число;

3)  $f(x) = P_s(x) \cdot e^{\alpha x}$  ;

4)  $f(x) = a \cdot \cos \beta x + b \cdot \sin \beta x$  , где  $a, b$  – числа;

5)  $f(x) = a \cdot \cos \beta x$  (или  $f(x) = a \cdot \sin \beta x$  )

6)  $f(x) = P_s(x) \cdot \cos \beta x + P_k(x) \cdot \sin \beta x$  ;

7)  $f(x) = a \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + b \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$  .

## ТЕОРЕМА 9 (о наложении решений).

Если  $\bar{y}_1(x)$  и  $\bar{y}_2(x)$  – решения соответственно уравнений

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f_2(x),$$

то функция

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$$

будет являться решением уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f_1(x) + f_2(x).$$