

# Математический анализ

## Раздел: Дифференциальные уравнения

### Тема: *Линейные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка*

(однородные с постоянными коэффициентами,  
уравнения Эйлера)

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

### 3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть линейное однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0, \quad (10)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – некоторые действительные числа.

Уравнение (10) называется *линейным однородным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами*.

Решения уравнения (10) будем искать в виде  $y = e^{\lambda x}$ , где  $\lambda$  – некоторая постоянная.

Имеем:

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}, \quad y''' = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}.$$

Подставляем  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$  в уравнение (10) и получаем:

$$\begin{aligned} \lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_1 \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \dots + a_{n-1} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_n \cdot e^{\lambda x} &= 0, \\ \Rightarrow \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (11) называется *характеристическим уравнением* (для) уравнения (10).

Многочлен в левой части (11) называется *характеристическим многочленом*,

Корни уравнения (11) называются *характеристическими корнями* уравнения (10).

### *Замечания.*

1) Формально характеристическое уравнение (11) получается из (10) заменой производных искомой функции на соответствующие степени  $\lambda$ , а самой функции – на  $\lambda^0 = 1$ .

2) Уравнение (10) – алгебраическое уравнение  $n$ -й степени.

⇒ оно имеет  $n$  корней, но

1) каждый корень считается столько раз, какова его кратность;

2) корни могут быть комплексными (причем, комплексные корни попарно сопряжены).

Следовательно, функции вида  $e^{\lambda x}$  в общем случае не дадут всю ф.с.р. уравнения (10).

## ТЕОРЕМА 6.

Пусть  $\lambda$  – характеристический корень уравнения (10). Тогда

1) если  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $\lambda$  – простой корень уравнения (11), то решением уравнения (10) является функция  $e^{\lambda x}$ ;

2) если  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $\lambda$  – корень кратности  $k$  уравнения (11), то решениями уравнения (10) являются функции

$$e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, x^2 \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda x};$$

3) если  $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$  и  $\lambda$  – простой корень уравнения (11), то  $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$  тоже является простым корнем уравнения (11), а решениями уравнения (10) являются функции

$$e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x;$$

4) если  $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$  и  $\lambda$  – корень кратности  $k$  уравнения (11), то  $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$  тоже является корнем кратности  $k$  уравнения (11), а решениями (10) являются функции

$$e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad x^2 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \\ e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x, \quad x^2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x.$$

Решения, относящиеся к различным характеристическим корням, линейно независимы и найденные таким образом  $n$  решений уравнения (10) будут образовывать его ф.с.р.

ПРИМЕР 1. Найти общее решение уравнения

$$y'''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0$$

ПРИМЕР 2. Найти общее решение уравнения

$$y'''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$$

ПРИМЕР 3. Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 8y'''' + 8y'' + 4y' = 0$$

## 4. Уравнения Эйлера

Линейное однородное уравнение вида

$$x^n \cdot y^{(n)} + a_1 x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x \cdot y' + a_n \cdot y = 0, \quad (12)$$

(где  $a_i \in \mathbb{R}$ ) называется **уравнением Эйлера**.

Уравнение Эйлера сводится к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами заменой  $x = e^t$ .

$\Rightarrow$  фундаментальная система решений уравнения (12) состоит из функций вида

$$x^\lambda \leftrightarrow e^{\lambda t};$$

$$\ln^\ell x \cdot x^\lambda \leftrightarrow t^\ell \cdot e^{\lambda t};$$

$$x^\alpha \cdot \cos(\beta \ln x), x^\alpha \cdot \sin(\beta \ln x) \leftrightarrow e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t, e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t;$$

$$\ln^\ell x \cdot x^\alpha \cos(\beta \ln x), \ln^\ell x \cdot x^\alpha \sin(\beta \ln x) \leftrightarrow t^\ell e^{\alpha t} \cos \beta t, t^\ell e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

**Замечание.** На практике, при интегрировании уравнения Эйлера, можно сразу записать его характеристическое уравнение.

Действительно, характеристическое уравнение – это условие для  $\lambda$ , при котором  $e^{\lambda t}$  является решением ЛОДУ.

Но  $e^{\lambda t} = x^\lambda$ . Следовательно, то же самое условие для  $\lambda$  получится, если потребовать, чтобы функция  $y = x^\lambda$  являлась решением уравнения (12).

**ПРИМЕР.** Найти общее решение уравнения

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

## 5. ЛОДУ 2-го порядка, с произвольными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = 0. \quad (13)$$

Пусть  $y_1(x)$  любое ненулевое решение уравнения (13).

Тогда его общее решение можно найти по **формуле Абеля**:

$$y = y_1 u = y_1 \cdot \left( \int \left[ \frac{C_1}{(y_1)^2} \cdot e^{-\int a_1(x) dx} \right] dx + C_2 \right).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнения  $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ ,

если известно, что его решением является функция

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}$$