

Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: *Линейные однородные
дифференциальные уравнения n -го порядка*

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

§27. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка

1. Общие понятия и определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка* называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции y и ее производных y' , y'' , ..., $y^{(n)}$, т.е. уравнение вида

$$p_0(x) \cdot y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) \cdot y' + p_n(x) \cdot y = g(x), \quad (7)$$

где $p_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) и $g(x)$ – заданные функции.

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (7) называется *линейным однородным*.

Если $g(x) \not\equiv 0$, то уравнение (7) называется *линейным неоднородным* (или *уравнением с правой частью*).

Так как $p_0(x) \neq 0$, то уравнение (7) можно записать в виде:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x). \quad (8)$$

Уравнение (8) называют **приведенным**.

В дальнейшем будем работать только с приведенным уравнением.

Кроме того, будем предполагать, что $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a; b]$.

Тогда в области

$$D = \{(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \mid \forall x \in [a; b], \forall y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

для уравнения (8) будут выполняться условия теоремы существования и единственности решения.

Следовательно, $\forall x_0 \in [a; b]$ и $\forall y_0, y_{0i} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение уравнения (8), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

2. Линейные однородные уравнения n -го порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) порядка n , т.е. уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 1 (свойство решений ЛОДУ).

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями ЛОДУ (9), то

$$y_1(x) + y_2(x) \text{ и } C \cdot y_1(x) \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

тоже являются решениями уравнения (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если y_1, y_2, \dots, y_n – решения уравнения (9), то их линейная комбинация*

$$C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \dots + C_n \cdot y_n$$

тоже является решением уравнения (9) для любых постоянных C_1, C_2, \dots, C_n .

Обозначим: $S[a;b]$ – множество решений уравнения (9),
 $C[a;b]$ – множество функций, непрерывных на $[a;b]$.

Имеем: $S[a;b] \subset C[a;b]$,

Из теоремы 1 $\Rightarrow S[a;b]$ – линейное подпространство $C[a;b]$

ЗАДАЧА. Изучить $S[a;b]$ как линейное пространство.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – $(n-1)$ раз дифференцируемые на $[a;b]$ функции.

Запишем для них определитель порядка n вида

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Определитель W – функция, определенная на $[a;b]$.

Его обозначают $W(x)$ или $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ и называют **определителем Вронского (вронскианом)** функций y_1, y_2, \dots, y_n .

ТЕОРЕМА 3 (необходимое условие линейной зависимости функций).

Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ $n - 1$ раз дифференцируемы и линейно зависимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского на $[a;b]$ тождественно равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 4 (достаточное условие линейной независимости решений ЛОДУ).

Если n решений ЛОДУ (9) линейно независимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 5 (теоремы 3 и 4).

Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ решения ЛОДУ (9). Тогда

1) либо $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv 0$ и это означает, что решения линейно зависимы;

2) либо $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0, \quad \forall x \in [a; b]$, и это означает, что решения линейно независимы.

ТЕОРЕМА 6 (о размерности пространства решений ЛОДУ).

Пространство решений $S[a; b]$ ЛОДУ (9) конечномерно и его размерность совпадает с порядком дифференциального уравнения, т.е.

$$\dim S[a; b] = n .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Система n линейно независимых решений ЛОДУ n -го порядка (базис пространства $S[a; b]$) называется его **фундаментальной системой решений** (фср).