

# Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: *Уравнения  $n$ -го порядка,  
допускающие понижение порядка*

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

# Глава IV. Дифференциальные уравнения высших порядков

## §25. Основные понятия и определения

*Дифференциальными уравнениями высшего порядка называют уравнения порядка выше первого.*

В общем случае ДУ высшего порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где  $n > 1$ .

*Замечание.* Функция  $F$  может и не зависеть от некоторых из аргументов  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ .

ДУ высшего порядка, которое можно записать в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

называют *уравнением, разрешенным относительно старшей производной.*

ДУ порядка  $n$  имеет множество решений (интегралов).

Чтобы выбрать одно из них, задают  $n$  условий, которым должно удовлетворять искомое решение.

Обычно, задают значение искомой функции и всех ее производных до порядка  $n - 1$  включительно при некотором значении аргумента  $x = x_0$ :

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}. \quad (3)$$

Совокупность условий (3) называется **начальными условиями** для дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.

Нахождение решения уравнения (1) (или (2)), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3), называется решением **задачи Коши** для этого уравнения.

## ТЕОРЕМА 1 (Коши).

Пусть для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

выполняются два условия:

- 1) функция  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  непрерывна как функция  $(n + 1)$ -ой переменной  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  в некоторой области  $D$   $(n + 1)$ -мерного пространства;
- 2) функция  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  имеет в этой области  $D$  ограниченные частные производные по переменным  $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ .

Тогда для любой точки  $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1}) \in D$  существует, и притом единственное, решение  $y = \varphi(x)$  уравнения (2), определенное в некотором интервале, содержащем точку  $x_0$ , и удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_{01}, \varphi''(x_0) = y_{02}, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

**Замечание.** Единственность решения задачи Коши для уравнения  $n$ -го порядка ( $n > 1$ ) НЕ ОЗНАЧАЕТ, что через данную точку  $M_0(x_0, y_0)$  плоскости  $xOy$  проходит одна интегральная кривая  $y = \varphi(x)$ .

Кривых через точку  $M_0$  проходит множество, а единственность означает, что они различаются набором значений  $y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ .

Из теоремы 1  $\Rightarrow$

1) ДУ (2) имеет множество решений.

2) Совокупность решений зависит от  $n$  произвольных постоянных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Общим решением** дифференциального уравнения  $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  (2)

в области  $D$  существования и единственности решения задачи Коши называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

зависящая от  $x$  и  $n$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , которая удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) при любых допустимых значениях  $C_1, C_2, \dots, C_n$  она удовлетворяет уравнению (2);
- 2) каковы бы ни были начальные условия

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1} \quad (3)$$

(где  $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1}) \in D$ ), можно найти единственный набор значений  $C_1 = C_{01}, C_2 = C_{02}, \dots, C_n = C_{0n}$  такой, что функция  $y = \varphi(x, C_{01}, C_{02}, \dots, C_{0n})$  удовлетворяет заданным начальным условиям.

Уравнение  $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ , задающее общее решение в неявном виде, называется **общим интегралом уравнения**.

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (2) представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от  $n$  параметров.

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется **частным**.

Любое решение (интеграл), получающееся из общего решения (интеграла) при конкретных значениях постоянных  $C_i$  (включая  $C_i = \pm\infty$ ), является частным.

Решение (интеграл), в каждой точке которого нарушено условие единственности, называется **особым**.

Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения. Оно всегда «теряется» в процессе интегрирования.

## §26. Уравнения, допускающие понижение порядка

### 1. Уравнение вида $F(x, y^{(n)}) = 0$

Возможны 2 случая:

- 1) уравнение разрешено относительно  $y^{(n)}$ ,
- 2) уравнение нельзя разрешить относительно  $y^{(n)}$ .

1) Пусть уравнение разрешено относительно  $y^{(n)}$ , т.е. имеет вид

$$y^{(n)} = f(x), \quad (4)$$

где  $f(x)$  непрерывна на  $(a; b)$ .

Общее решение уравнения (4) получается в результате  $n$ -кратного последовательного интегрирования правой части, т.е. имеет вид:

$$y = \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1} \cdot x + C_n.$$



2) Пусть уравнение  $F(x, y^{(n)}) = 0$  не разрешено относительно  $y^{(n)}$ .

Если уравнение допускает параметрическое представление

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t),$$

то его решение можно найти в параметрическом виде.

Действительно,

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = y^{(n)} \cdot dx;$$

$$\left. \begin{array}{l} y^{(n)} = \psi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n-1)} = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1)$$

Аналогично найдем  $y^{(n-2)}$ ,  $y^{(n-3)}$ , ...,  $y'$ ,  $y$  и получим общее решение

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

## 2. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка $(k - 1)$ включительно

Пусть уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1 \leq k < n). \quad (5)$$

Уравнение (5) допускает понижение порядка на  $k$  единиц.

Действительно, сделаем замену  $y^{(k)} = z(x)$ .

Тогда  $y^{(k+1)} = z'(x)$ ,  $y^{(k+2)} = z''(x)$ , ...,  $y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$

и уравнение примет вид

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (5_1)$$

Пусть  $z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$  – общее решение (5<sub>1</sub>).

Тогда  $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ .

$\Rightarrow$  общее решение уравнения (5) получается  $k$ -кратным интегрированием функции  $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ .

### 3. Уравнение не содержит независимого переменного

Пусть уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (6)$$

Уравнение (6) допускает понижение порядка на единицу.

Действительно, сделаем замену  $y' = z(y)$ .

Тогда

$$y'' = z' \cdot z,$$
$$y''' = z'' \cdot z^2 + (z')^2 \cdot z,$$

.....

$$y^{(n)} = \omega(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}).$$

Подставляя эти выражения в (5), получаем уравнение  $(n - 1)$ -го порядка.

Пусть  $z = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$  – общее решение получившегося после замены уравнения.

Тогда  $y' = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})} = dx.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (6) будет иметь вид

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})} = x + C.$$

## 4. Уравнение, однородное относительно неизвестной функции и ее производных

Уравнение  $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$

называется **однородным относительно  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$** , если при всех  $t \neq 0$  выполняется тождество

$$F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) .$$

Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу заменой  $y' = yz$ , где  $z = z(x)$  – новая неизвестная функция.