Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель***

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

§22. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (14)$$
называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е. если
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y)\ .$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид $$u(x,y) = C\ .$$

$\Rightarrow$ Задачи:

1) научиться определять, когда выражение
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$
является полным дифференциалом;

2) научиться находить функцию $u(x,y)$, зная ее полный дифференциал.

ТЕОРЕМА 1.

Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ *определены и непрерывны в области* D *плоскости* xOy *и имеют в ней непрерывные частные производные*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для того чтобы выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, *необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области* D *выполнялось условие*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Способы нахождения функции $u(x, y)$:

1) используя алгоритм, предложенный в доказательстве теоремы 1;
2) используя одну из следующих формул:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} \underbrace{N(x,y)}_{x - const}\,dy$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{M(x,y)}_{y - const}\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy$$

где (x_0, y_0) – любая точка области D непрерывности функций $M(x, y)$, $N(x, y)$.

3) методом ***интегрируемых комбинаций***.

Суть метода интегрируемых комбинаций: выделить в

$$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy$$

выражения, являющиеся дифференциалами известных функций («***интегрируемые комбинации***») и привести его таким образом к виду $du(x\,,y)$.

ПРИМЕРЫ интегрируемых комбинаций:

$$x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \qquad \frac{dx}{x} = d\left(\ln|x|\right),$$

$$xdy + ydx = d(xy), \qquad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right).$$

§23. Интегрирующий множитель

Функция $\mu(x,y)$ *называется* ***интегрирующим множителем*** *уравнения* $$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy = 0, \qquad (14)$$ *если после его умножения на* $\mu(x,y)$ *левая часть уравнения становится полным дифференциалом некоторой функции.*

Пусть функции $M(x\,,y)$, $N(x\,,y)$ определены и непрерывны в области D плоскости xOy и имеют в ней непрерывные частные производные

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ТЕОРЕМА 1 (о существовании интегрирующего множителя вида $\mu(x)$ или $\mu(y)$).

Пусть

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi, \qquad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = \psi.$$

1) *Если* $\varphi = \varphi(x)$, *то уравнение* (14) *имеет интегрирующий множитель* $\mu(x)$, *который является решением уравнения*

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \varphi(x);$$

2) *Если* $\psi = \psi(y)$, *то уравнение* (14) *имеет интегрирующий множитель* $\mu(y)$, *который является решением уравнения*

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = -\psi(y).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Найти интегрирующий множитель для линейного дифференциального уравнения первого порядка.
2) Найти интегрирующий множитель для уравнения Бернулли.
3) Получить формулу (уравнение) для нахождения интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(x^2 + y^2)$.

   Найти общий интеграл уравнения

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2 y + y^3)dy + ydx - xdy = 0$$

4) Получить формулу (уравнение) для нахождения интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(xy)$.

   Найти общий интеграл уравнения

$$\left(3\frac{y}{x} + 2 + \frac{2}{y}\right)dx + \left(6 + \frac{x}{y} + \frac{3}{xy}\right)dy = 0$$