

§20. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется ДУ 1-го порядка, линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y' .

⇒ В общем случае линейное уравнение 1-го порядка можно записать в виде $y' + p(x) \cdot y = f(x)$, (8)
где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется **однородным**.
В противном случае уравнение называется **неоднородным**.

Линейное однородное уравнение

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

является уравнением с разделяющимися переменными.

Его общее решение:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x) dx}, \quad \forall C. \quad (9)$$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (8):

$$y' + p(x) \cdot y = f(x). \quad (8)$$

Существуют два метода его интегрирования.

I) *Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)*

- 1) Интегрируем однородное уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$, соответствующее данному неоднородному уравнению.

Его общее решение имеет вид (9):

$$y = C \cdot e^{-\int p(x) dx}.$$

- 2) Полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения.

⇒ Оно имеет вид

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}.$$

Функцию $C(x)$ найдем, подставив y и y' в исходное неоднородное уравнение (8).

Получим:
$$C(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + C.$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид:

$$y(x) = \left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int p(x) dx}. \quad (10)$$

Замечания.

1) Раскроем скобки в (10):

$$y(x) = C \cdot e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \cdot \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx. \quad (11)$$

Заметим, что первое слагаемое в (11) – общее решение линейного однородного уравнения, а второе – частное решение линейного неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C = 0$).

2) Так как $e^x \neq 0$, то любую функцию $y(x)$ можно записать в виде

$$y(x) = \frac{y(x)}{e^x} \cdot e^x.$$

Это является основанием метода вариации постоянной.

II) *Метод Бернулли.*

Будем искать решение (8) в следующем виде:

$$y = u(x) \cdot v(x).$$

Тогда

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Подставим y и y' в уравнение (8) и получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + puv = f(x)$$

или

$$u' \cdot v + u \cdot [v' + pv] = f(x).$$

Полагаем, что функция $v(x)$ такова, что

$$\left. \begin{array}{l} [v' + pv] = 0. \\ u' \cdot v = f(x). \end{array} \right\} \quad (12)$$

Тогда

Условия (12) позволяют однозначно определить $v(x)$ и $u(x)$.
При этом получим

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx},$$

$$u(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

Замечание. Линейное неоднородное уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = b$$

проще интегрировать как уравнение с разделяющимися переменными

§21. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n, \quad (13)$$

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции,
 $n \neq 0$, $n \neq 1$ (иначе это будет линейное уравнение).

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению.

Для этого надо

- 1) обе части уравнения (13) разделить на y^n ,
- 2) сделать замену $z = y^{1-n}$.

Замечания.

- 1) Уравнение Бернулли при $n > 0$ имеет решение $y = 0$. Оно будет частным решением при $n > 1$ (обычно входит в общее при $C = \infty$) и особым при $0 < n < 1$.

2) Решив получившееся после замены линейное уравнение методом Бернулли, получим:

$$z = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^{n-1}} = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow y^{n-1} = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{1}{v(x)},$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{u(x)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{v(x)} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \tilde{u}(x) \cdot \tilde{v}(x).$$

Таким образом, решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде произведения двух функций методом Бернулли, не приводя предварительно к линейному уравнению.