Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: ***Векторное поле***

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

§13. Векторное поле

1. Определение векторного поля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* G – *некоторая область в пространстве* $Oxyz$. *Говорят, что на* G *задано* ***векторное поле*** (***векторная функция***), *если в каждой точке* $M(x;y;z)\in G$ *задан вектор* $\bar{\mathbf{a}}$, *длина и направление которого зависят от координат точки* M.

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}(x;y;z) = \bar{\mathbf{a}}(M)$

или $\bar{\mathbf{a}} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$

Векторное поле может зависеть не только от координат точки, но и от времени. Такое поле называют ***нестационарным*** (***переменным***).

Будем рассматривать только ***стационарные*** (не зависящие от времени) векторные поля.

Частные случаи векторных полей:

1) Однородное поле

Векторное поле называется ***однородным***, если $\bar{\mathbf{a}}(M)$ – постоянный вектор, т.е. $\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{a}}$.

2) Плоское поле

Векторное поле называется ***плоским***, если в выбранной системе координат координаты вектора $\bar{\mathbf{a}}(M)$ не зависят от одной переменной, причем проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}(M)$ на ось отсутствующей переменной – нулевая.

Например, $\bar{\mathbf{a}} = P(x;y)\mathbf{i} + Q(x;y)\mathbf{j}$

Основные характеристики векторных полей

1) Векторные линии
2) Поток вектора
3) Дивергенция
4) Циркуляция
5) Ротор

2. Векторные линии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Векторной линией*** *векторного поля* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется линия, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением поля (т.е. с вектором* $\bar{\mathbf{a}}(M)$).

ПРИМЕРЫ:

1) В поле скоростей текущей жидкости векторные линии – линии тока жидкости.
2) В электрическом (электромагнитном) поле векторные линии – силовые линии.

В векторном поле $\bar{\mathbf{a}} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ векторные линии – решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

3. Поток вектора. Дивергенция

Поток вектора и дивергенция – характеристики интенсивности поля.

Пусть в области $G \subset Oxyz$ задано векторное поле:

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

(S) – незамкнутая ориентированная поверхность в G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Потоком векторного поля*** $\bar{\mathbf{a}}(M)$ (*вектора* $\bar{\mathbf{a}}(M)$) *через поверхность* (S) *называется величина* K, *равная*

$$K = \iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОТОКА ВЕКТОРА

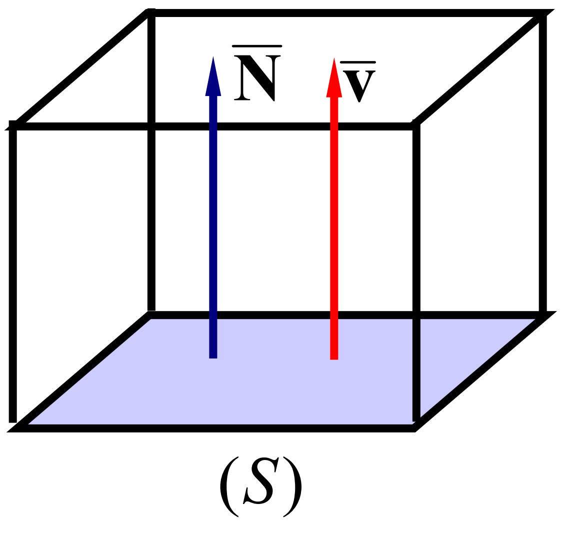
Пусть имеется текущая жидкость:

$\Rightarrow \bar{\mathbf{v}}(M)$ – поле скоростей текущей жидкости.

(S) – незамкнутая двусторонняя поверхность, помещенная в жидкость

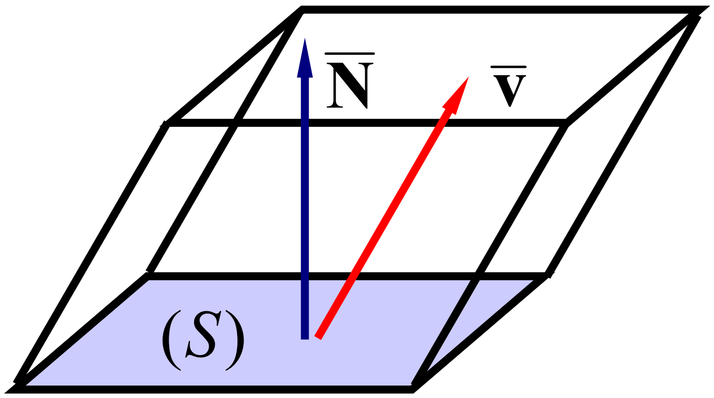
Найдем K – количество жидкости, протекающей через (S) за единицу времени (в направлении нормали $\bar{\mathbf{N}}$).

1) Пусть (S) – плоская область, $\bar{\mathbf{v}}$ – const, $\bar{\mathbf{v}} \perp (S)$.



$$\Rightarrow K = S \cdot |\, \bar{\mathbf{v}} \,|$$

2) Пусть (S) – плоская область, φ – угол между $\bar{\mathbf{v}}$ и $\bar{\mathbf{N}}$.



$$\Rightarrow\ K = S\cdot\underbrace{\cos\varphi\cdot|\,\bar{\mathbf{v}}\,|}_{\text{Пр}_{\bar{\mathbf{N}}}\bar{\mathbf{v}}}$$

Пусть $\bar{\mathbf{n}}\perp(S)$ и $|\,\bar{\mathbf{n}}\,|=1.$

Тогда $$\text{Пр}_{\bar{\mathbf{n}}}\bar{\mathbf{v}}=\frac{(\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{n}})}{|\,\bar{\mathbf{n}}\,|}=(\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{n}})$$

$$\Rightarrow\ K = S\cdot(\bar{\mathbf{n}}\,,\,\bar{\mathbf{v}})$$

3) Рассмотрим общий случай.

Пусть (S) – произвольная поверхность,

$$\bar{\mathbf{v}} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

а) Разобьем (S) на n частей, не имеющих общих внутренних точек: $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ldots, (\Delta S_n)$.

б) На каждой части (ΔS_i) выберем произвольную точку M_i

Если (ΔS_i) – мала, то (ΔS_i) можно считать плоской, а скорость жидкости постоянной и равной $\bar{\mathbf{v}}(M_i)$

$$\Rightarrow\ K_i \approx \Delta S_i \cdot (\bar{\mathbf{n}}(M_i), \bar{\mathbf{v}}(M_i))$$

где K_i – поток жидкости через (ΔS_i) .

$$\Rightarrow \quad K = \sum_{i=1}^{n} K_i \approx \sum_{i=1}^{n} (\bar{\mathbf{v}}(M_i), \bar{\mathbf{n}}(M_i)) \cdot \Delta S_i$$

$$\Rightarrow \quad K = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{\mathbf{v}}(M_i), \bar{\mathbf{n}}(M_i)) \cdot \Delta S_i$$

где d_i – диаметр (ΔS_i) , $\quad \lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Получили:

$$K = \iint\limits_{(s)} (\overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{n}})\, ds$$

$$\Rightarrow \quad K = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad K = \iint\limits_{(S)} P dydz + Q dxdz + R dxdy$$

Таким образом, *если* $\overline{\mathbf{v}}(M)$ – *поле скоростей текущей жидкости*, *то* K – ***количество жидкости***, ***протекающей через поверхность*** (S) ***за единицу времени*** (в направлении нормали).

Если угол между нормалью к поверхности и вектором $\bar{\nabla}(M)$ тупой, то $K<0$

$\Rightarrow$ жидкость течет в сторону, противоположную нормали к поверхности.

Если угол между нормалью к поверхности и вектором $\bar{\nabla}(M)$ равен 90°, то $K = 0$

$\Rightarrow$ жидкость через поверхность не течет (линии тока жидкости параллельны поверхности).

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОТОКА ВЕКТОРА ЧЕРЕЗ ЗАМКНУТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Пусть $\bar{\mathbf{v}}(M)$ – поле скоростей текущей жидкости,
(S) – замкнутая поверхность (внешняя сторона), ограничивающая область (V)

Тогда $K=K_2–K_1$, где K_1 – количество жидкости втекающей в область (V), K_2 – количество жидкости вытекающей из (V) за единицу времени.

$\Rightarrow$ 1) Если $K>0$, то из (V) вытекает жидкости больше чем втекает (внутри области (V) имеются источники, добавляющие жидкость)

2) Если $K<0$, то из (V) вытекает жидкости меньше чем втекает (внутри области (V) имеются стоки, удаляющие жидкость)

3) Если $K=0$, то из (V) вытекает жидкости столько же, сколько втекает (внутри области (V) либо нет источников и стоков, либо их суммарная мощность равна)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Дивергенцией*** *векторного поля в точке* M *называется предел отношения потока вектора через замкнутую поверхность, окружающую точку* M*, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку* M.

ОБОЗНАЧАЮТ: $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M)$.

Таким образом, если

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

то

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = \lim_{(S)\to M} \frac{\displaystyle\oiint_{(S)} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy}{V}$$

Если $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M)>0$, то точка М называется ***источником***.

Если $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M)<0$, то точка М называется ***стоком***.

Величина $|\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M)|$ характеризует мощность источника (стока).

ТЕОРЕМА. *Пусть в области* $G \subset Oxyz$ *задано векторное поле*:

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}\,,$$

причем функции P, Q, R *и их частные производные непрерывны в* G .

Тогда $\forall M \in G$ *существует* $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M)$ *и справедлива формула*

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}$$

ОБОЗНАЧИМ:

$$\overline{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

Этот символический вектор называют ***набла-вектором*** или ***оператором Гамильтона***.

$$\Rightarrow \operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = (\overline{\nabla}, \bar{\mathbf{a}})$$

ТЕОРЕМА Остроградского – Гаусса в векторной форме.

Поток вектора $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ *изнутри замкнутой поверхности* (S) (*т.е. нормаль к поверхности внешняя*) *равен тройному интегралу от дивергенции этого вектора по телу, ограниченному поверхностью* (S):

$$\iint\limits_{+(S)} P dydz + Q dxdz + R dxdy = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(x, y, z)\, dxdydz$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ Остроградского – Гаусса:

В поле скоростей текущей жидкости поток жидкости через замкнутую поверхность равен суммарной мощности всех источников и стоков ограниченных этой поверхность.

СВОЙСТВА ДИВЕРГЕНЦИИ

1) Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = \text{const}$, то $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = 0$;

2) Если C_1, C_2 – const, то $\operatorname{div}(C_1\bar{\mathbf{a}}_1 + C_2\bar{\mathbf{a}}_2) = C_1\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}_1 + C_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}_2$;

3) Если $u = u(x,y,z) = u(M)$, то

$$\operatorname{div}[u(M)\cdot\bar{\mathbf{a}}(M)] = u(M)\cdot\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) + (\operatorname{grad} u(M),\ \bar{\mathbf{a}}(M))$$

4. Циркуляция. Ротор

Циркуляция и ротор – характеристики вращательной способности поля.

Пусть в области $G \subset Oxyz$ задано векторное поле:

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

(ℓ) – замкнутый контур в G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Циркуляцией векторного поля*** $\bar{\mathbf{a}}(M)$ (*вектора* $\bar{\mathbf{a}}(M)$) *по замкнутому контуру* (ℓ) *называется величина* C, *равная*

$$C = \oint\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА

Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ – сила, под действием которой точка перемещается по контуру (ℓ), то циркуляция вектора $\bar{\mathbf{a}}(M)$ – работа силы.

Наибольшего значения циркуляция будет достигать если (ℓ) – векторная линия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Ротором векторного поля***

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

называется вектор $[\overline{\nabla}, \bar{\mathbf{a}}]$

ОБОЗНАЧАЮТ: $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M)$

Имеем:

$$\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) = [\overline{\nabla}, \bar{\mathbf{a}}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ РОТОРА

Вектор $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M)$ указывает направление, ортогонально которому вращательная способность поля наибольшая.

ТЕОРЕМА (формула Стокса в векторной форме). *Циркуляция вектора* $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ *по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность, ограниченную этим контуром* (говорят: *натянутую на этот контур*).

СВОЙСТВА РОТОРА

1) Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = \text{const}$, то $\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{0}}$;

2) Если C_1, C_2 – const, то $\text{rot}(C_1\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1} + C_2\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{2}) = C_1\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{1} + C_2\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{2}$;

3) Если $u = u(x,y,z) = u(M)$, то

$$\text{rot}[u(M) \cdot \bar{\mathbf{a}}(M)] = u(M) \cdot \text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) + [\text{grad}\, u(M)\, ,\, \bar{\mathbf{a}}(M)]\ ;$$

4) $\text{rot}(\text{grad}\, u) = \bar{\mathbf{0}}$;

5) $\text{div}(\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}) = 0$.

5. Типы векторных полей

а) соленоидальное

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***соленоидальным*** (трубчатым), *если* $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv 0$.

Физический смысл: векторное поле соленоидальное ⇔ в нем нет источников и стоков.

СВОЙСТВА СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ПОЛЯ

1) *Если векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *является ротором некоторого векторного поля* (т.е. $\bar{\mathbf{a}}(M) = \operatorname{rot}\bar{\mathbf{b}}(M) = [\bar{\nabla}, \bar{\mathbf{b}}]$), *то оно является соленоидальным* .

   Вектор $\bar{\mathbf{b}}(M)$ называют ***векторным потенциалом*** векторного поля $\bar{\mathbf{a}}(M)$.

2) *Поток векторного поля через любую замкнутую поверхность* (S) *равен нулю*.

б) потенциальное

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***потенциальным*** *если*

$$\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv \bar{\mathbf{0}}$$

СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

1) *Векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *потенциальное* $\Leftrightarrow$ *оно является градиентом некоторого скалярного поля*, т.е.

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = \mathrm{grad}\,u(M) = \bar{\nabla} u$$

Функцию $u(M)$ называют ***потенциалом*** векторного поля $\bar{\mathbf{a}}(M)$.

2) *Циркуляция потенциального векторного поля по любой замкнутой линии* (ℓ) *равен нулю*.

3) *Векторные линии потенциального поля незамкнуты*.

4) *В потенциальном поле векторные линии перпендикулярны к поверхностям уровня потенциала*

в) гармоническое

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***гармоническим*** *если оно является соленоидальным и потенциальным одновременно.*

СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1) *Поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *гармоническое* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot}\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv \bar{\mathbf{0}}$ *и* $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv 0$.

2) *Если векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *гармоническое, то* $\exists u(M)$ *такая, что*

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = \operatorname{grad} u(M)$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют ***уравнением Лапласа***.

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется ***гармонической***.

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$, *не яляющееся соленоидальным, потенциальным или гармоническим, называется полем общего вида.*

ТЕОРЕМА (о представлении векторного поля общего вида в виде суммы потенциального и соленоидального полей).

Пусть $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$ *– поле общего вида,*

$P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ *– непрерывно дифференцируемы.*

Тогда векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *может быть представлено в виде*

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{a}}_1(M) + \bar{\mathbf{a}}_2(M) ,$$

где $\bar{\mathbf{a}}_1(M)$ *– потенциальное поле,*

$\bar{\mathbf{a}}_2(M)$ *– соленоидальное поле.*