Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: ***Поверхностный интеграл* II *рода***

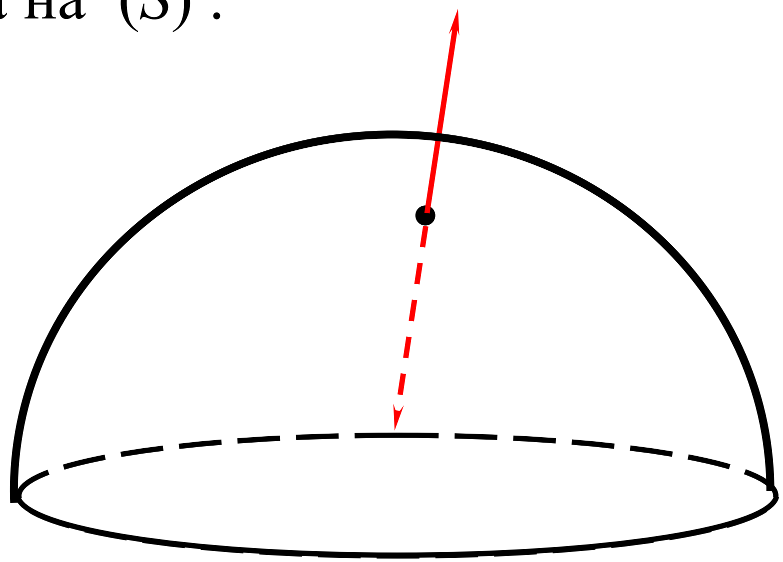
Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

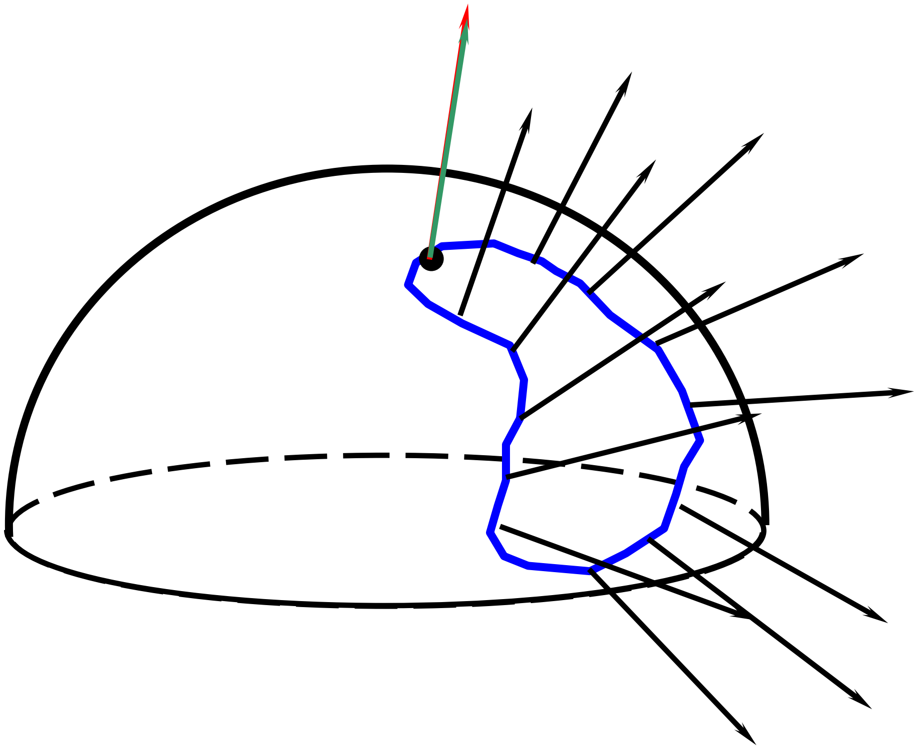
§12. Поверхностный интеграл II рода (по координатам)

1. Односторонние и двусторонние поверхности

Пусть (S) – гладкая поверхность в пространстве $Oxyz$, M – любая точка на (S) .

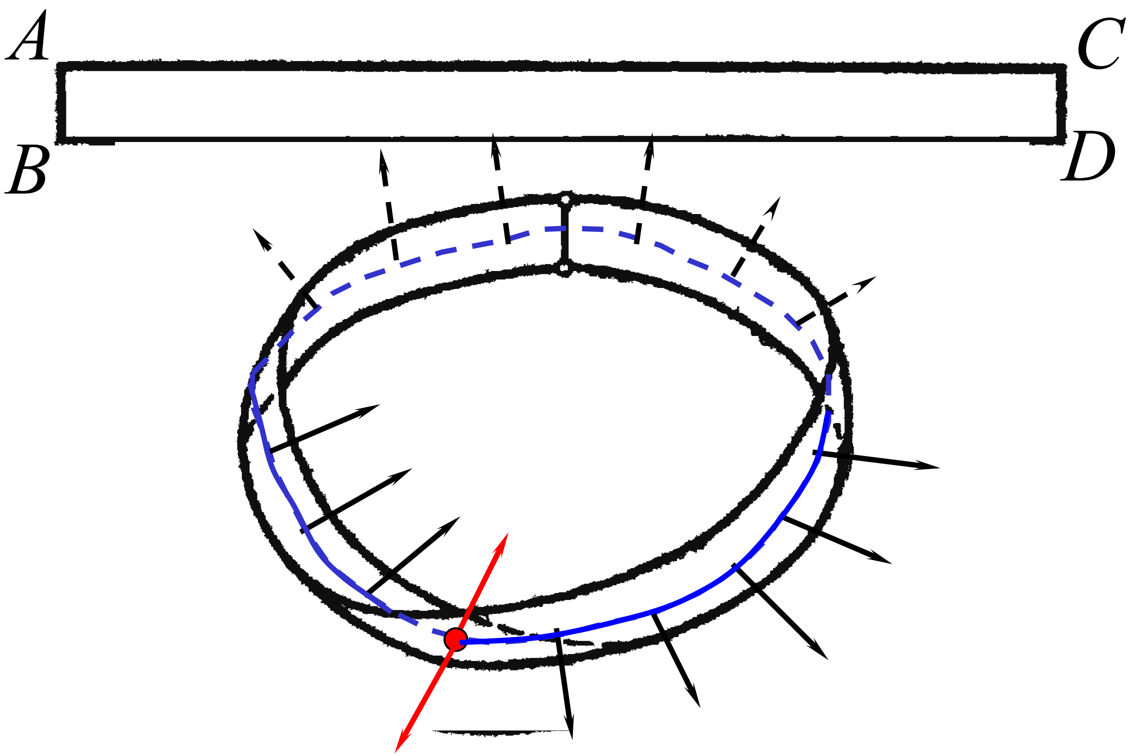


1) Проведем в M нормаль (вектор, перпендикулярный к касательной плоскости) к (S).
2) Выберем одно из двух направлений нормали.



3) Непрерывно перемещаем M вместе с выбранной нормалью вдоль любой замкнутой кривой (ℓ) на (S), не пересекающей ее границу

Если в прежнее положение точка M вернется с тем же направлением нормали (для любой точки M и любой кривой (ℓ)), то поверхность называют ***двусторонней***



Если в прежнее положение точка M вернется с противоположным направлением нормали (хотя бы для одной точки M и хотя бы одной кривой (ℓ)), то поверхность называют ***односторонней***

2. Определение и свойства поверхностного интеграла II рода

Пусть (S) – двусторонняя поверхность, с выбранным направлением нормали (т.е. стороной) и на (S) задана функция $R(x,y,z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем область (S) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ \dots , (\Delta S_n).$$

2. В каждой области (ΔS_i) выберем произвольную точку $K_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$.
3. Обозначим через $\Delta S_{i(xy)}$ – площадь проекции (ΔS_i) на плоскость xOy, взятую со знаком «+», если выбранное на (S) направление нормали в точке K_i составляет с осью Oz острый угол, и со знаком «–» в противном случае.
4. Вычислим произведение $R(K_i) \cdot \Delta S_{i(xy)}$.

Сумму $$I_n(\Delta S_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} R(K_i)\cdot \Delta S_{i(xy)}$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $R(x,y,z)$ по поверхности (S) по переменным x и y (соответствующей данному разбиению области (S) и данному выбору точек K_i).

Пусть d_i – диаметр (ΔS_i) , $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$

*Число I называется **пределом интегральных сумм** $I_n(\Delta S_i, K_i)$ при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения поверхности (S) у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек K_i выполняется неравенство*

$$|\, I_n(\Delta S_i, K_i) - I \,| < \varepsilon\,.$$

*Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta S_i, K_i)$ при $\lambda \to 0$, то его называют **поверхностным интегралом II рода от функции $R(x,y,z)$ по поверхности (S) по переменным x и y**.*

Обозначают: $$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy\,.$$

Аналогично определяются интегралы

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz$$

Сумму

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz + \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy$$

записывают в виде

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

и ***называют поверхностным интегралом* II *рода*** (***по координатам***).

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА II РОДА

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. Поверхностный интеграл II рода зависит от стороны поверхности (т.е. от выбора нормали). При перемене стороны поверхности (S) поверхностный интеграл II рода меняет знак.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла II рода, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} c \cdot P dydz = c \cdot \iint\limits_{(S)} P dydz,$$

$$\iint\limits_{(S)} c \cdot Q dxdz = c \cdot \iint\limits_{(S)} Q dxdz,$$

$$\iint\limits_{(S)} c \cdot R dxdy = c \cdot \iint\limits_{(S)} R dxdy.$$

3. Поверхностный интеграл II рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме поверхностных II рода от этих функций, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} [P_1 + P_2] dydz = \iint\limits_{(S)} P_1 dydz + \iint\limits_{(S)} P_2 dydz$$

$$\iint\limits_{(S)} [Q_1 + Q_2] dxdz = \iint\limits_{(S)} Q_1 dxdz + \iint\limits_{(S)} Q_2 dxdz$$

$$\iint\limits_{(S)} [R_1 + R_2] dxdy = \iint\limits_{(S)} R_1 dxdy + \iint\limits_{(S)} R_2 dxdy$$

4. Если поверхность (S) разбита на две части (S_1) и (S_2), не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S_1)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy + \iint\limits_{(S_2)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

(свойство аддитивности поверхностного интеграла II рода).

5. Если (S) – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Ox (т.е. имеющая уравнение $\varphi(y,z)=0$), то

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz = 0$$

Если (S) – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oy (т.е. имеющая уравнение $\psi(x,z)=0$), то

$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz = 0$$

Если (S) – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz (т.е. имеющая уравнение $\chi(x,y)=0$), то

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = 0$$

3. Вычисление поверхностного интеграла II рода

Пусть (S) – двусторонняя поверхность, заданная уравнением $z = f(x,y)$,

(σ_{xy}) – проекция (S) на плоскость xOy, квадрируемая область

$f(x,y)$ – непрерывна в области (σ_{xy}) ,

$R(x,y,z)$ – непрерывна на (S) .

Выберем верхнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz острый) .

Тогда:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} R(x,y,f(x,y))dxdy$$

Выберем нижнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz тупой) .

Тогда:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{(\sigma_{xy})} R(x,y,f(x,y))dxdy$$

Аналогично вычисляются интегралы

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz \qquad \text{и} \qquad \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz$$

ТЕОРЕМА 1 (достаточные условия существования поверхностного интеграла II рода).

Если выполнены условия:

а) (S) – *двусторонняя поверхность, состоящая из конечного числа явно заданных поверхностей* $z = f_i(x,y)$,

б) $R(x,y,z)$ – *кусочно-непрерывна на* (S),

в) $f_i(x,y)$ – *кусочно-непрерывна в квадрируемой области* (σ) (*проекции поверхности* (S) *на плоскость* xOy),

то поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy$ *существует.*

Аналогичные утверждения справедливы и для интегралов

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz \qquad \text{и} \qquad \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz$$

4. Формула Остроградского – Гаусса

Пусть (V) кубируемое цилиндрическое тело, ограниченное поверхностями

(S_1): $z = f_1(x,y)$ (низ),

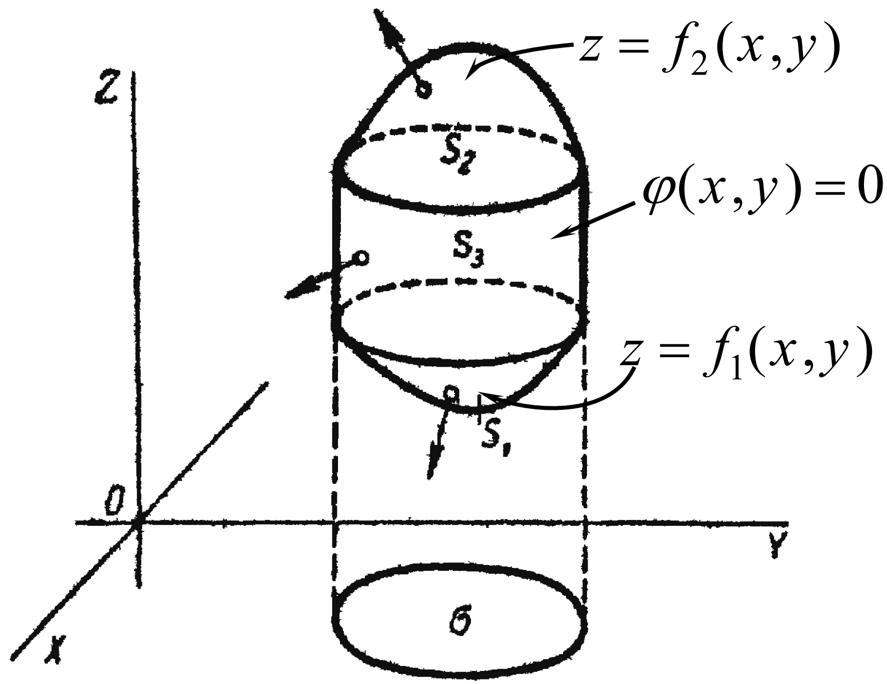
(S_2): $z = f_2(x,y)$ (верх),

(S_3): $\varphi(x,y) = 0$ (боковая поверхность),

функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ непрерывны в квадрируемой области $(\sigma_{xy}) \in xOy$ (проекции (V) на плоскость xOy),

$R(x,y,z)$ кусочно-непрерывна и ограничена на поверхности (S)

$R'_z(x,y,z)$ кусочно-непрерывна и ограничена в области (V)



Получили
$$\oiint\limits_{+(S)} R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{(V)} R'_z dxdydz$$

Аналогично получаем:
$$\oiint\limits_{+(S)} P(x,y,z)dydz = \iiint\limits_{(V)} P'_x dxdydz$$
$$\oiint\limits_{+(S)} Q(x,y,z)dxdz = \iiint\limits_{(V)} Q'_y dxdydz$$

В общем случае:
$$\oiint\limits_{+(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{(V)} (P'_x + Q'_y + R'_z)dxdydz$$

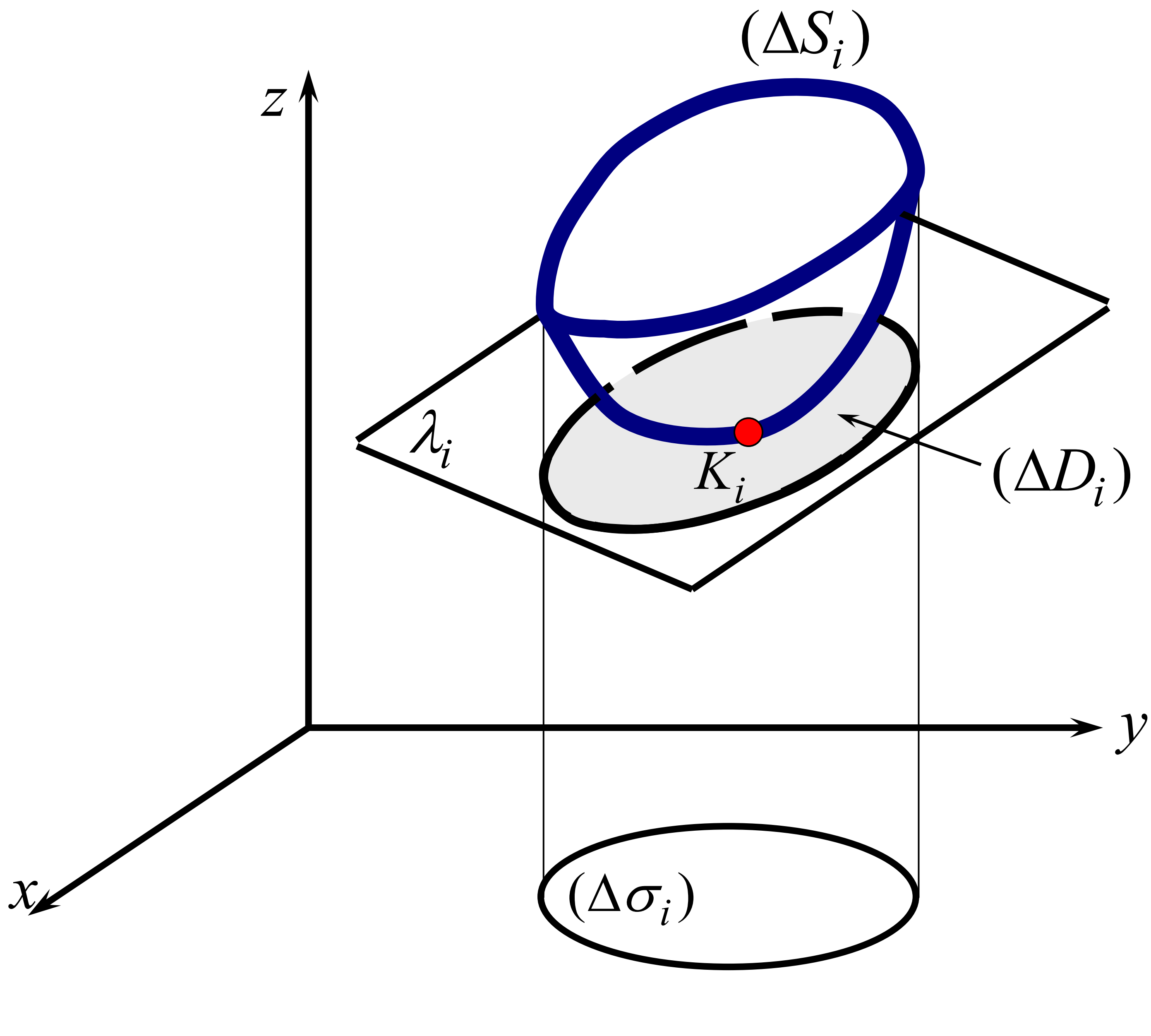
– **формула Остроградского – Гаусса**.

5. Связь между поверхностными интегралами I и II рода

Пусть (S) – двусторонняя гладкая поверхность, заданная уравнением $z = f(x,y)$
(σ_{xy}) – проекция (S) на плоскость xOy, квадрируемая область,
$f(x,y)$ – непрерывна в (σ_{xy})
$R(x,y,z)$ – непрерывна на (S) .
Выберем верхнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz острый) .

Тогда существует интеграл

$$\iint\limits_{(S)} R(x, y, z)dxdy$$



(ΔS_i)
z
λ_i
K_i
(ΔD_i)
y
x
$(\Delta\sigma_i)$

Получили:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\cdot\cos\gamma\, ds$$

Формула остается справедливой и при выборе нижней стороны поверхности.

Аналогично доказывается справедливость формул

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz = \iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\cdot\cos\alpha\, ds$$

$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dxdz = \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\cdot\cos\beta\, ds$$

Таким образом, в общем случае получаем:

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{(S)} \left(P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma\right)ds$$

– связь поверхностных интегралов I и II рода.

ЛЕММА 2.

Пусть 1) *гладкая двусторонняя поверхность* (S) *имеет уравнение* $z = f(x,y)$,

2) (σ_{xy}) – *квадрируемая область, проекция* (S) *на* xOy.

Если существует интеграл

$$\iint\limits_{+(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

то справедливо равенство

$$\iint\limits_{+(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \left(-f'_x \cdot P - f'_y \cdot Q + R\right) dxdy$$

7. Формула Стокса

Пусть (S) – двусторонняя незамкнутая поверхность, которая может быть задана явно, например, уравнением $z = f(x,y)$;

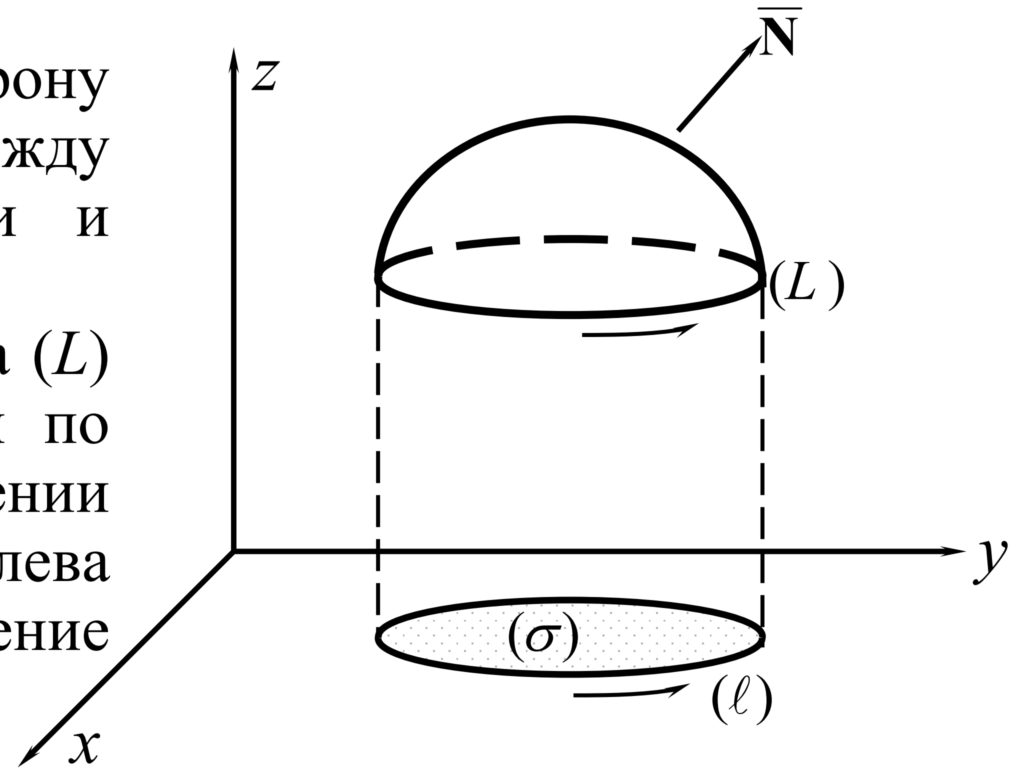
(σ_{xy}) – проекция (S) на плоскость xOy,

(L) – граница (S), кусочно-гладкая замкнутая кривая;

(ℓ) – проекция (L) на плоскость xOy ($\Rightarrow$ кусочно-гладкая замкнутая).

Выберем верхнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz острый) .

Выберем направление обхода (L) так, чтобы при движении по (L) в выбранном направлении область (S) оставалась слева (положительное направление обхода).



Пусть $f(x,y)$ – непрерывна в области (σ_{xy});
$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – непрерывны на (S) вместе со своими частными производными.

Тогда существует интеграл

$$\oint\limits_{+(L)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

и для него справедливо равенство:

$$\oint\limits_{+(L)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dxdz + (Q'_x - P'_y)dxdy$$

– **формула Стокса**