

Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: *Криволинейный интеграл II рода*

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

§10. Криволинейный интеграл II рода (по координатам)

1. Задача, приводящая к криволинейному интегралу II рода

Пусть под действием силы $\vec{F} = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$ точка перемещается по кривой (ℓ) из точки L_1 в точку L_2 .

ЗАДАЧА: найти работу, которую совершает сила $\vec{F}$.

1. Разобьем (ℓ) на n частей точками $M_0=L_1, M_1, \dots, M_n=L_2$.
2. Если $(\Delta\ell_i) = (M_{i-1}M_i)$ – мала, то $(\Delta\ell_i)$ можно считать отрезком, а $\vec{F}$ – постоянной.

Тогда работа силы по перемещению точки из M_{i-1} в M_i равна

$$A_i \approx P(K_i) \cdot \Delta x_i + Q(K_i) \cdot \Delta y_i + R(K_i) \cdot \Delta z_i,$$

где K_i – произвольная точка из $(\Delta\ell_i)$, $\overline{M_{i-1}M_i} = \{\Delta x_i; \Delta y_i; \Delta z_i\}$

Тогда

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \approx \sum_{i=1}^n P(K_i) \cdot \Delta x_i + Q(K_i) \cdot \Delta y_i + R(K_i) \cdot \Delta z_i,$$

$$A = \lim_{(\Delta\ell_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(K_i) \cdot \Delta x_i + Q(K_i) \cdot \Delta y_i + R(K_i) \cdot \Delta z_i.$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла II рода

Пусть $(\ell) = (L_1 L_2)$ – простая (т.е. без кратных точек) спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в пространстве $Oxyz$, и на кривой (ℓ) задана функция $P(x, y, z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем кривую (ℓ) произвольным образом на n частей точками $M_0=L_1, M_1, \dots, M_n=L_2$ в направлении от L_1 к L_2 .
2. Пусть $M_i(x_i; y_i; z_i)$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (т.е. проекцию дуги $(M_{i-1}M_i)$ на ось Ox)
3. На каждой дуге $(M_{i-1}M_i)$ выберем произвольную точку $K_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ и вычислим произведение $P(K_i) \cdot \Delta x_i$.

Сумму

$$I_n(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^n P(K_i) \cdot \Delta x_i$$

назовем **интегральной суммой** для функции $P(x, y, z)$ по кривой (ℓ) по переменной x (соответствующей данному разбиению кривой (ℓ) и данному выбору точек K_i).

Пусть $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta M_{i-1} M_i$, где $\Delta M_{i-1} M_i$ — длина дуги $(M_{i-1} M_i)$

Число I называется **пределом интегральных сумм** $I_n(M_i, K_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения кривой (ℓ) у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек K_i выполняется неравенство

$$|I_n(M_i, K_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(M_i, K_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, то его называют **криволинейным интегралом от функции $P(x, y, z)$ по переменной x по кривой (ℓ)** .

Обозначают: $\int_{(\ell)} P(x, y, z) dx$ или $\int_{(L_1)}^{(L_2)} P(x, y, z) dx$.

Аналогично определяются интегралы

$$\int_{(\ell)} Q(x, y, z) dy \quad \text{и} \quad \int_{(\ell)} R(x, y, z) dz$$

Сумму $\int_{(\ell)} P(x, y, z) dx + \int_{(\ell)} Q(x, y, z) dy + \int_{(\ell)} R(x, y, z) dz$

записывают в виде

$$\int_{(\ell)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

и называют **криволинейным интегралом II рода (по координатам)**.

СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА

II РОДА

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

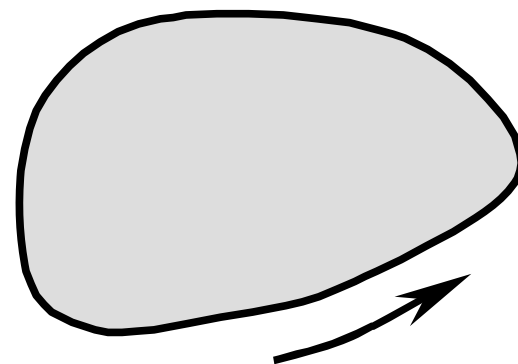
1. Криволинейный интеграл II рода зависит от направления движения по кривой. При изменении направления обхода кривой $(L_1 L_2)$ криволинейный интеграл II рода меняет знак, т.е.

$$\int_{(L_1 L_2)} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{(L_2 L_1)} Pdx + Qdy + Rdz$$

2. Если кривая (ℓ) замкнута, то криволинейный интеграл II рода не зависит выбора начальной точки L_1 , а зависит от направления обхода кривой.

Направление обхода замкнутой кривой, при котором область, лежащая «внутри» контура, остается слева по отношению к движущейся точке, называют **положительным**. Противоположное ему направление называют **отрицательным**.

На плоскости положительным направлением обхода является направление против хода часовой стрелки.



Криволинейный интеграл II рода по замкнутому контуру в положительном направлении обозначают:

$$\oint_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

В отрицательном направлении:

$$\oint_{-(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

3. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ криволинейного интеграла II рода.

Пусть $\bar{\mathbf{F}} = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$ – сила, под действием которой точка перемещается по кривой (ℓ) из L_1 в L_2 .

Работа, которую при этом совершает сила $\bar{\mathbf{F}}$, будет равна

$$A = \int_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла II рода, т.е.

$$\int_{(\ell)} c \cdot Pdx = c \cdot \int_{(\ell)} Pdx,$$

$$\int_{(\ell)} c \cdot Qdy = c \cdot \int_{(\ell)} Qdy,$$

$$\int_{(\ell)} c \cdot Rdz = c \cdot \int_{(\ell)} Rdz.$$

5. Криволинейный интеграл II рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных интегралов II рода от этих функций, т.е.

$$\int_{(\ell)} [P_1 + P_2] dx = \int_{(\ell)} P_1 dx + \int_{(\ell)} P_2 dx$$

$$\int_{(\ell)} [Q_1 + Q_2] dy = \int_{(\ell)} Q_1 dy + \int_{(\ell)} Q_2 dy$$

$$\int_{(\ell)} [R_1 + R_2] dz = \int_{(\ell)} R_1 dz + \int_{(\ell)} R_2 dz$$

6. Если кривая (L_1L_2) разбита точкой K на две части (L_1K) и (KL_2) , то

$$\int_{(L_1L_2)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(L_1K)} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{(KL_2)} Pdx + Qdy + Rdz$$

(свойство аддитивности криволинейного интеграла II рода).

3. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Пусть простая (не имеющая кратных точек) кривая $(\ell)=(L_1L_2)$ задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad (2)$$

где $t \in [\alpha; \beta]$ (или $t \in [\beta; \alpha]$) ($L_1 \leftrightarrow \alpha$, $L_2 \leftrightarrow \beta$).

ТЕОРЕМА 1.

Если (ℓ) – гладкая кривая, заданная уравнениями (2) и функция $P(x, y, z)$ непрерывна на (ℓ) , то $P(x, y, z)$ интегрируема по переменной x по кривой (ℓ) и справедливо равенство

$$\int_{(\ell)} P(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad (3)$$

Аналогичным образом вычисляются интегралы

$$\int_{(\ell)} Q(x, y, z) dy \quad \text{и} \quad \int_{(\ell)} R(x, y, z) dz$$

СЛЕДСТВИЕ 2.

Если выполнены условия:

- 1) $(\ell) = (L_1 L_2)$ – гладкая кривая в плоскости xOy , заданная уравнением $y = \varphi(x)$ (где x пробегает отрезок с концами a и b ; $L_1(a; \varphi(a))$, $L_2(b; \varphi(b))$),
- 2) функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны на (ℓ) ,
то существует криволинейный интеграл II рода $\int_{(\ell)} Pdx + Qdy$
и справедливо равенство

$$\int_{(\ell)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)] dx$$

ТЕОРЕМА 3 (достаточные условия существования криволинейного интеграла II рода).

Если (ℓ) – кусочно-гладкая спрямляемая кривая и функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ кусочно-непрерывны на (ℓ) , то существует интеграл

$$\int_{(\ell)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

4. Связь между криволинейными интегралами II рода и двойными интегралами

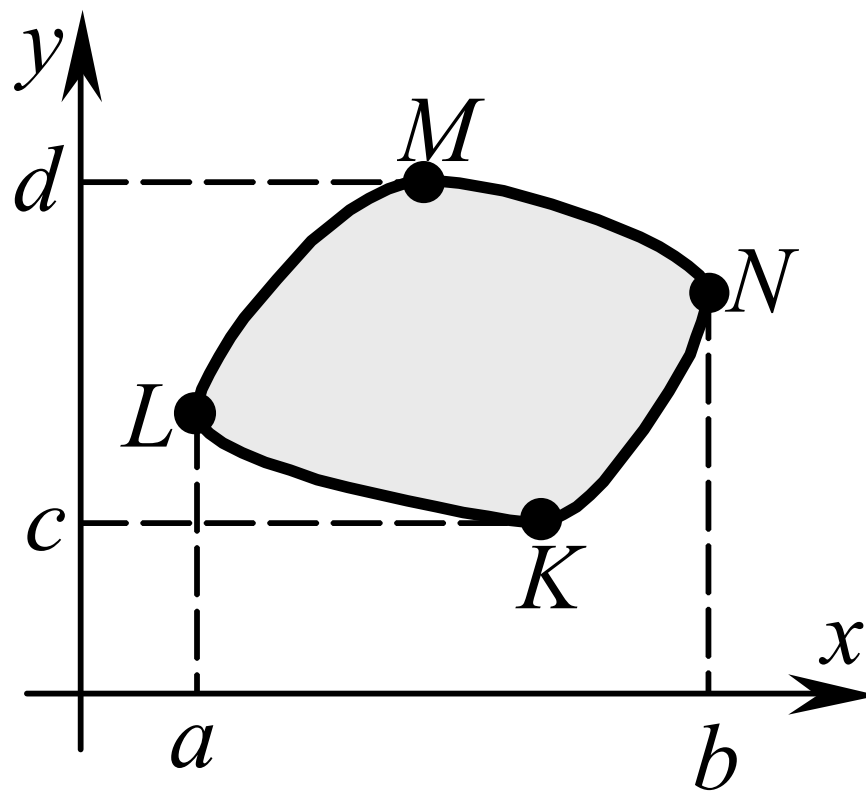
Пусть (σ) – замкнутая ограниченная область на плоскости xOy ,
 (ℓ) – граница (σ) , кусочно гладкая,
 $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P'_y(x, y)$, $Q'_x(x, y)$ – кусочно непрерывны в области (σ)

Тогда существуют интегралы

$$\oint_{(\ell)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad \iint_{(\sigma)} P'_y(x, y)dxdy, \quad \iint_{(\sigma)} Q'_x(x, y)dxdy$$

и справедлива **формула Грина**:

$$\oint_{+(\ell)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{(\sigma)} (Q'_x - P'_y)dxdy$$



5. Криволинейные интегралы II рода, не зависящие от пути интегрирования

ЛЕММА 4. *Для того, чтобы криволинейный интеграл*

$$\int_{(L_1 L_2)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру (ℓ) был равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 5. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области $D \subset Oxyz$.

Следующие условия эквивалентны:

1)
$$\oint_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \forall (\ell) \subset D;$$

2) выполняются равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z};$$

3) выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y,z)$, т.е.
$$du = Pdx + Qdy + Rdz.$$

6. Интегрирование полных дифференциалов

Пусть $Pdx + Qdy + Rdz = du$;

$(\ell) = (L_1 L_2)$ – простая гладкая кривая (любая)

(ℓ) : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, где $t \in [\alpha; \beta]$ (или $t \in [\beta; \alpha]$)
($L_1 \leftrightarrow \alpha$, $L_2 \leftrightarrow \beta$) .

Рассмотрим

$$\int_{(L_1 L_2)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Получим:

$$\int_{(L_1 L_2)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = u(L_2) - u(L_1)$$

Таким образом, для криволинейного интеграла II рода от полного дифференциала справедлив аналог формулы Ньютона – Лейбница.

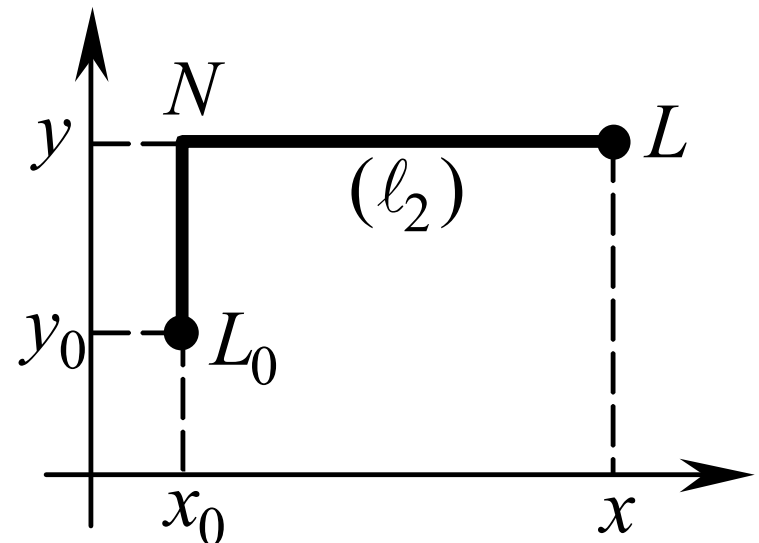
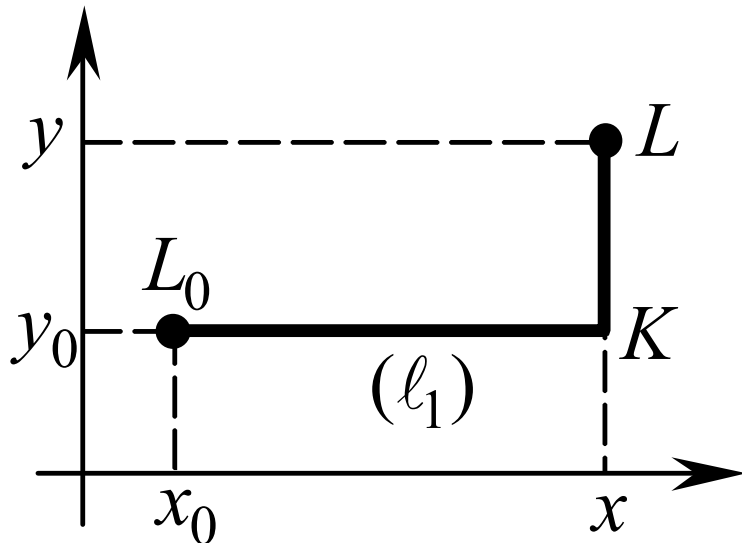
Нахождение функции по ее дифференциалу

Пусть $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$;

Тогда $\forall L(x,y)$ и $\forall L_0(x_0,y_0)$

$$\int_{(L_0L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(L) - u(L_0)$$

Рассмотрим интеграл, полагая $(L_0L) = (\ell_1)$ или $(L_0L) = (\ell_2)$:



Получили:
$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y \underbrace{Q(x, y)}_{x-\text{const}} dy + C$$

или
$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \underbrace{P(x, y)}_{y-\text{const}} dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$$

Аналогично, для функции 3-х переменных доказывается справедливость формулы

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y \underbrace{Q(x, y, z_0)}_{x-\text{const}} dy + \int_{z_0}^z \underbrace{R(x, y, z)}_{x, y-\text{const}} dz + C$$

где x_0, y_0, z_0 – любая точка из области непрерывности функций $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$.

7. Связь криволинейных интегралов I и II рода

Если (ℓ) – простая гладкая кривая, то справедлива формула

$$\int_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(\ell)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\ell$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора, касательного к кривой (ℓ) .

8. Геометрическое приложение криволинейного интеграла II рода

Пусть (σ) – квадратуемая область в плоскости xOy ,

(ℓ) – граница (σ) , кусочно-гладкая.

Тогда площадь области (σ) может быть найдена по формуле:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \oint_{(\ell)} xdy - ydx$$

