Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: ***Тройной интеграл***

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

§8. Тройной интеграл

1. Задача, приводящая к понятию тройного интеграла

Пусть (V) – замкнутая ограниченная область в $Oxyz$ (тело),

$\gamma = \gamma(x,y,z)$ – плотность распределения массы в области (V)

ЗАДАЧА. Найти массу m тела (V).

1. Разобьем (V) на n частей $(\Delta V_1), (\Delta V_2), \ldots, (\Delta V_n)$.
2. Если (ΔV_i) – мала, то (ΔV_i) можно считать однородной и ее масса $m_i \approx \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i$,

   где ΔV_i – объем (ΔV_i), P_i – произвольная точка из (ΔV_i) .

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i ,$$

$$m = \lim_{(\Delta V_i) \to P_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i ,$$

2. Определение и свойства тройного интеграла

Пусть (V) – кубируемая (т.е. имеющая объем) область в пространстве $Oxyz$, и в области (V) задана функция $u = f(x,y,z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем область (V) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta V_1), (\Delta V_2), \ \dots \ , (\Delta V_n).$$

2. В каждой области (ΔV_i) выберем произвольную точку $P_i(\xi_i;\eta_i\zeta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta V_i$, где ΔV_i – объем области (ΔV_i).

Сумму

$$I_n(\Delta V_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta V_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y,z)$ по области (V) (соответствующей данному разбиению области (V) и данному выбору точек P_i).

Пусть d_{i} – диаметр (ΔV_{i}) , $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Число I *называется* ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta V_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$ *, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения области* (V) *у которого* $\lambda < \delta$ *, при любом выборе точек* P_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta V_i, P_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta V_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$*, то его называют* ***тройным интегралом от функции*** $f(x,y,z)$ ***по области*** (V).

Обозначают:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV , \qquad \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$$

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие существования тройного интеграла).

Если функция $f(x,y,z)$ *интегрируема в области* (V), *то она ограничена в этой области.*

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия существования тройного интеграла).

Если выполняются условия:

1) *область* (V) *– кубируемая,*
2) $f(x,y,z)$ *ограничена в области* (V),
3) $f(x,y,z)$ *непрерывна в области* (V) *всюду* (*за исключением*, *возможно, некоторого множества точек объема нуль),*

то $f(x,y,z)$ *интегрируема в области* (V) .

СВОЙСТВА ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. $\iiint\limits_{(V)} dxdydz = V$, где V – объем тела (V) .

2. Постоянный множитель можно выносить за знак тройного интеграла, т.е.

$$\iiint\limits_{(V)} c \cdot f(x,y,z)dxdydz = c \cdot \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$$

3. Тройной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме тройных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iiint\limits_{(V)} \left[f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)\right]dV = \iiint\limits_{(V)} f_1(x,y,z)dV + \iiint\limits_{(V)} f_2(x,y,z)dV$$

4. Если область интегрирования (V) разбита на две части (V_1) и (V_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{(V_2)} f(x,y,z)dV$$

(свойство аддитивности тройного интеграла).

5. Если всюду в области (V) $f(x,y,z) > 0$ $(f(x,y,z) \geq 0)$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz > 0 \quad \left(\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \geq 0 \right)$$

6. Если всюду в области (V) $f(x,y,z) \leq \varphi(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_{(V)} \varphi(x,y,z)dxdydz$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.
Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ в области (V), то

$$m \cdot V \leq \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dxdydz \leq M \cdot V,$$

где V – объем области (V).

8. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в области (V), то $|f(x,y,z)|$ тоже интегрируема в области (V) и справедливо неравенство

$$\left| \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dxdydz \right| \leq \iiint\limits_{(V)} |f(x, y, z)| dxdydz,$$

9. Теорема о среднем для тройного интеграла.

Если функция $f(x,y,z)$ *непрерывна в замкнутой области* (V), *то найдется такая точка* $P_0(x_0,y_0,z_0)\in(V)$, *что справедливо равенство*

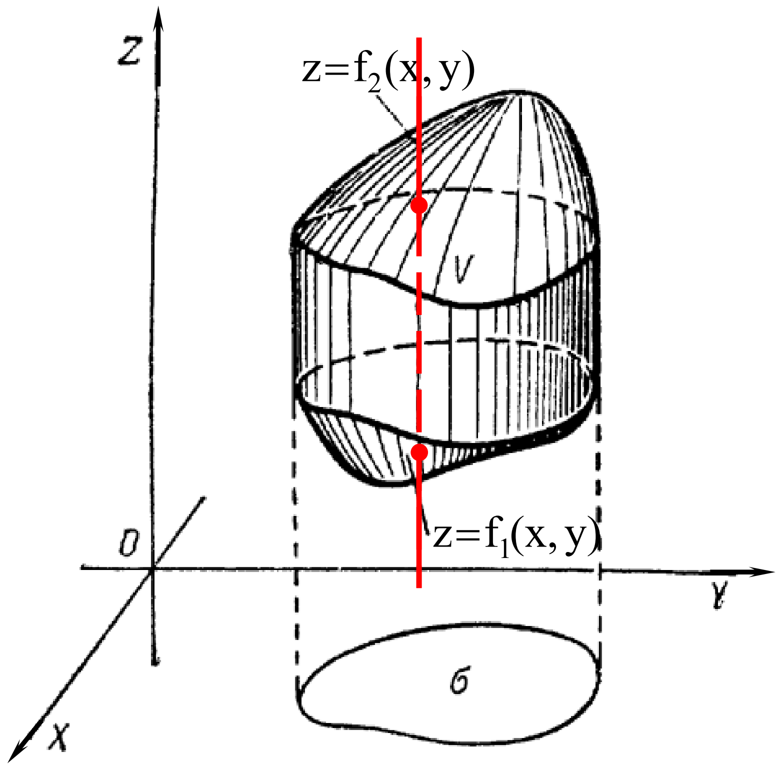
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)\cdot V ,$$

где V *– объем области* (V).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Вычисление тройного интеграла

Назовем замкнутую и ограниченную область $(V) \subset Oxyz$ ***правильной в направлении оси*** *Oz*, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области (V) параллельно оси Oz пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением.



ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция* $f(x,y,z)$ *интегрируема в области* (V).

Если область (V) *– правильная в направлении оси* Oz *причем:*

1) (σ) *– проекция области* (V) *на плоскость* xOy, *является квадрируемой областью,*
2) *поверхности* $z=f_1(x,y)$, $z=f_2(x,y)$, *ограничивающие* (V) *соответственно снизу и сверху , непрерывны на* (σ) ,

то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy,$$

Интеграл $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy$

называют *повторным* и записывают в виде $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} dxdy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

Интеграл $\displaystyle\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ называют *внутренним* .

4. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть (V) – кубируемая область в пространстве $Oxyz$,
$f(x,y,z)$ – ограничена и непрерывна в области (V) всюду, кроме, может быть, некоторого множества точек, объема нуль.

Тогда существует интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz$

Введем новые переменные по формулам:

$$x = \varphi(u,v,w),\ \ y = \psi(u,v,w),\ z = \chi(u,v,w),\ \ (u,v,w)\in(G) \qquad (1)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ интерпретация (1): отображение области (G) пространства $Cuvw$ на некоторую область пространства $Oxyz$.

Пусть функции $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$ такие, что (1) является отображением области (G) на область (V) (т.е. если точка (u,v,w) пробегает область (G) , то соответствующая ей точка (x,y,z) пробегает область (V)) .

Пусть отображение (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) отображение (1) взаимно однозначно в замкнутой кубируемой области (G) (т.е. различным точкам области (G) соответствуют различные точки области (V));

б) функции $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$ имеют в области (G) непрерывные частные производные первого порядка;

в) $I(u,v,w)=\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w \end{vmatrix}\neq 0$ во всех точках (G).

Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \qquad (2)$$

$$=\iiint\limits_{(G)} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))\cdot\left|I(u,v,w)\right|dudvdw$$

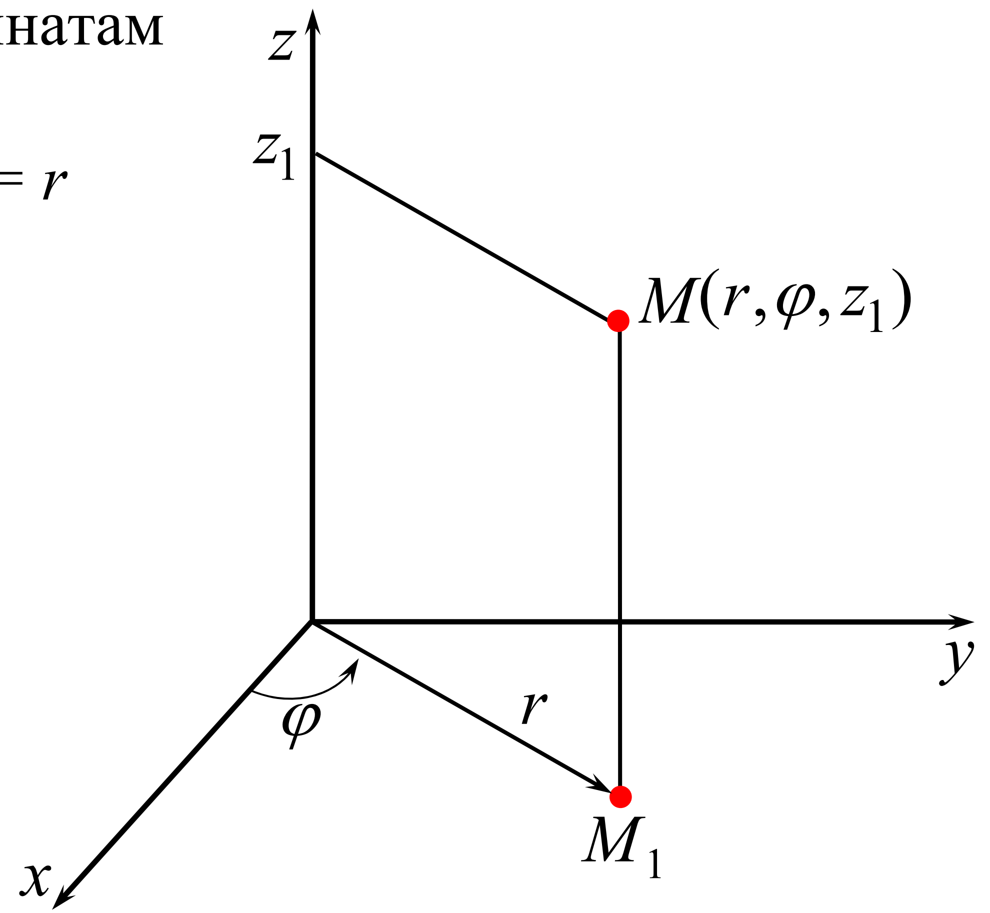
Формулу (2) называют ***формулой замены переменных в тройном интеграле***, определитель $I(u,v,w)$ называют ***якобианом отображения*** (1).

Два наиболее часто встречающихся случая замены переменных в тройном интеграле:

1) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z_1$,

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi \; (-\pi < \varphi \le \pi)$, $-\infty < z_1 < +\infty$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ смысл: переход в пространстве к цилиндрическим координатам

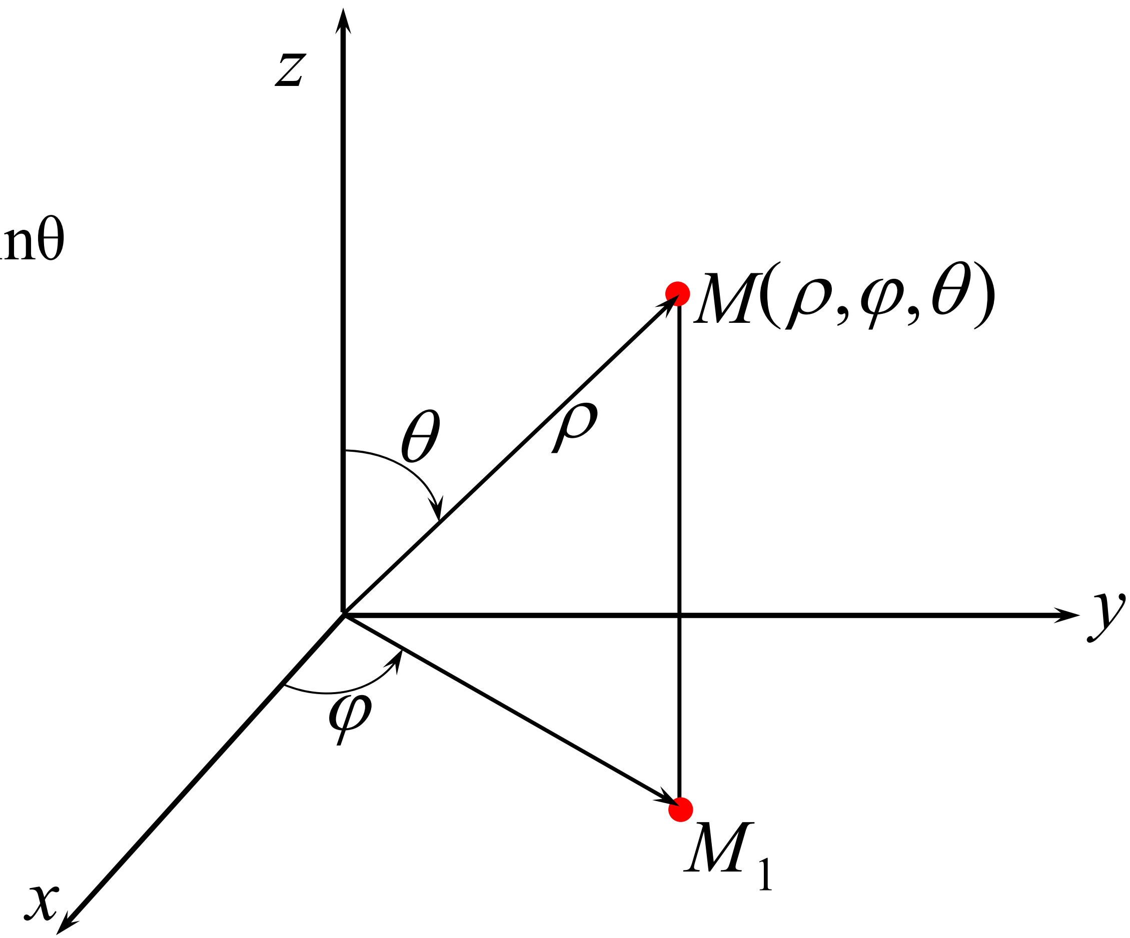


В этом случае $I(r,\varphi,z_1) = r$

2) $x = \rho\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta$, $y = \rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta$, $z = \rho\cdot\cos\theta$

где $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ ($-\pi < \varphi \le \pi$) , $0 \le \theta \le \pi$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ смысл: переход в пространстве к сферическим координатам



В этом случае

$$I(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2 \cdot \sin\theta$$

5. Геометрические и физические приложения тройных интегралов

1) Объем V кубируемого тела $(V) \in Oxyz$:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz$$

Пусть (V) – материальное тело (кубируемая область $(V) \in Oxyz$) с плотностью $\gamma(x,y,z)$.

Тогда

2) $\iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)dxdydz = m$ – масса тела (V) .

3) Статические моменты тела (V) относительно плоскостей xOy, yOz и xOz равны соответственно:

$$S_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

$$S_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

4) $x_0 = \dfrac{S_{yz}}{m}, \quad y_0 = \dfrac{S_{xz}}{m}, \quad z_0 = \dfrac{S_{xy}}{m}$ – координаты центра масс тела (V).

5) Моменты инерции тела (V) относительно осей Ox, Oy и Oz равны соответственно:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z)dxdydz$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z)dxdydz$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z)dxdydz$$

6) $I_o = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z)dxdydz$ – момент инерции тела (V) относительно начала координат .