

Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: *Двойной интеграл*  
(замена переменных, приложения)

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

## 4. Замена переменных в двойном интеграле

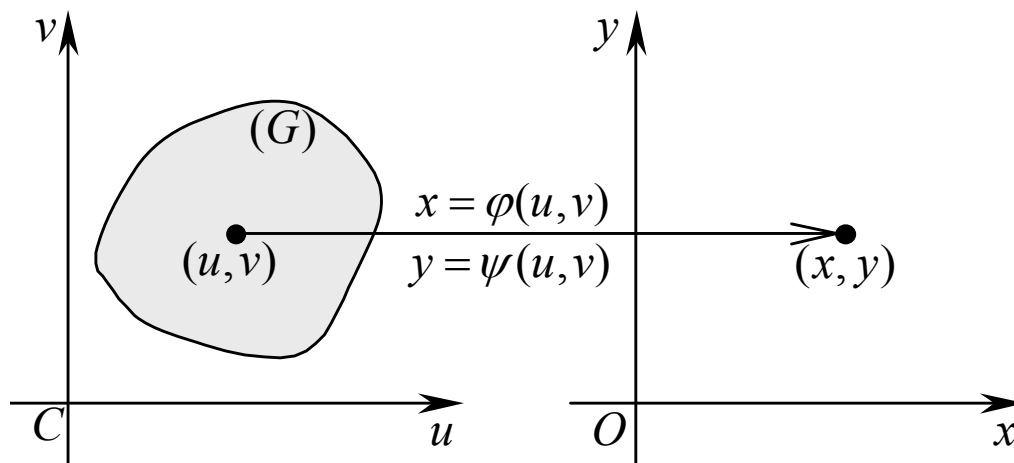
Пусть  $(\sigma)$  – квадратуемая область в плоскости  $xOy$ ,  
 $f(x,y)$  – ограничена и непрерывна в области  $(\sigma)$  всюду, кроме,  
может быть, некоторого множества точек, площади нуль.

Тогда существует интеграл 
$$\iint_{(\sigma)} f(x,y) dx dy$$

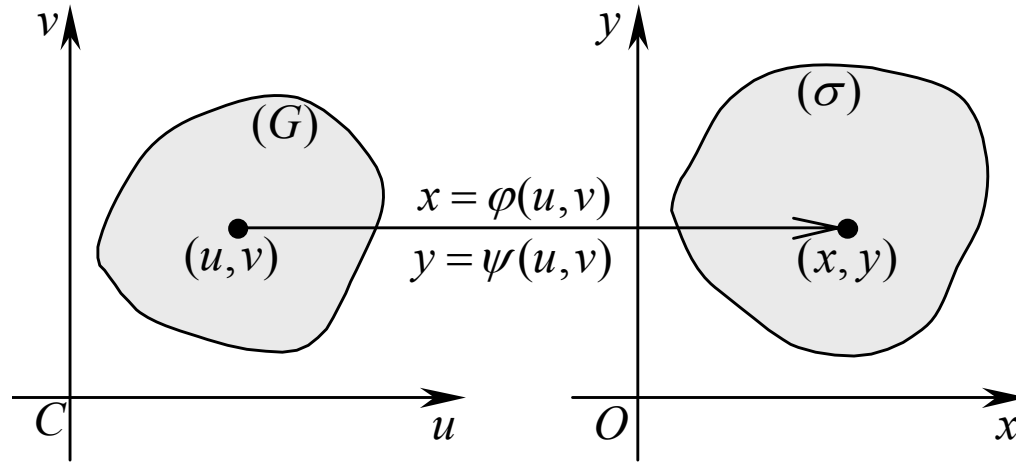
Введем новые переменные по формулам:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad (u,v) \in (G) \quad (1)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ интерпретация (1):



Пусть функции  $\varphi(u,v)$ ,  $\psi(u,v)$  такие, что каждая точка  $(u,v) \in (G)$  переходит в некоторую точку  $(x,y) \in (\sigma)$ , и каждой точке  $(x,y) \in (\sigma)$  соответствует некоторая точка  $(u,v) \in (G)$ .



В этом случае:

- 1) говорят: «если точка  $(u,v)$  пробегает область  $(G)$ , то соответствующая ей точка  $(x,y) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$  пробегает область  $(\sigma)$ »;
- 2) функции (1) называют *отображением области  $(G)$  на область  $(\sigma)$* .

Область  $(\sigma)$  называют *образом* области  $(G)$ , область  $(G)$  – *прообразом* области  $(\sigma)$  при отображении (1).

Пусть отображение (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) отображение (1) взаимно однозначно в замкнутой квадратуемой области  $(G)$  (т.е. различным точкам области  $(G)$  соответствуют различные точки области  $(\sigma)$ );

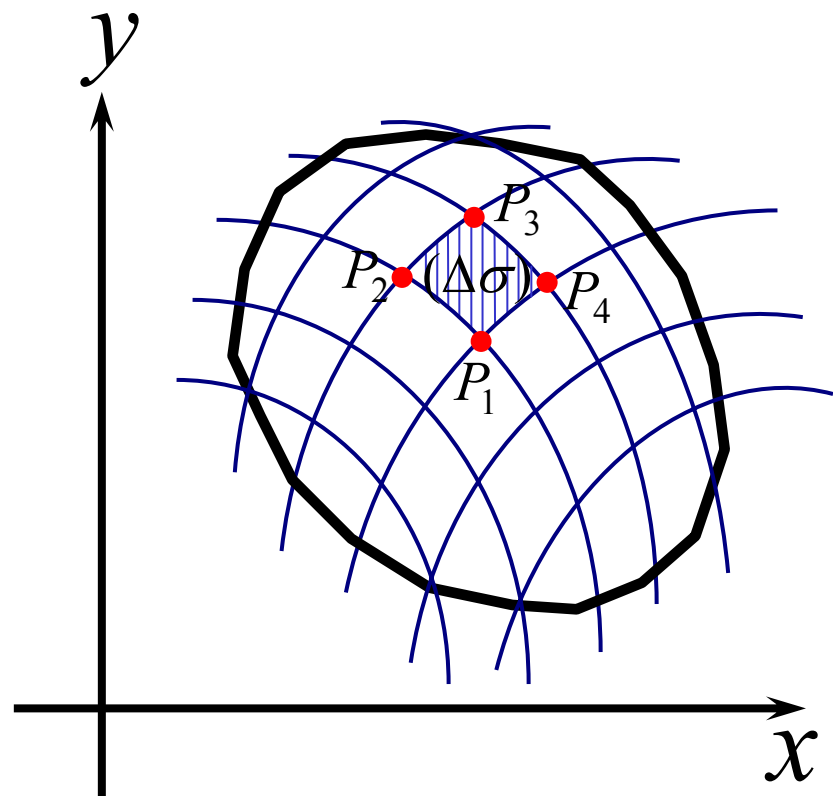
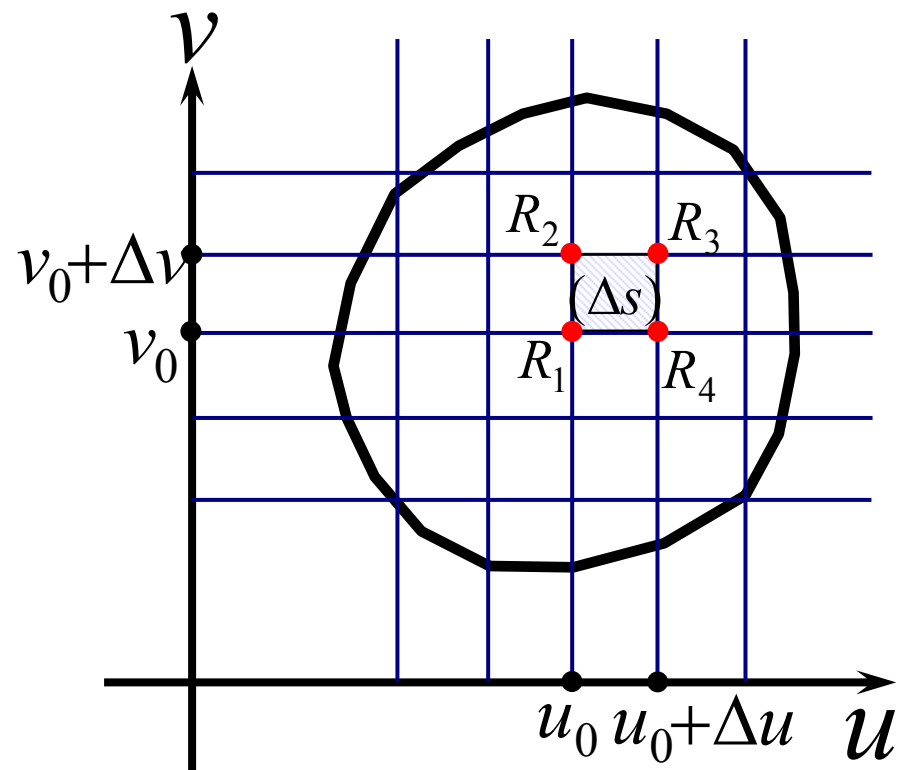
б) функции  $\varphi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$  имеют в области  $(G)$  непрерывные частные производные первого порядка;

в) 
$$I(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{во всех точках области } (G).$$

Тогда справедлива формула

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \iint_{(G)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |I(u, v)| du dv \quad (2)$$

Формулу (2) называют **формулой замены переменных в двойном интеграле**, определитель  $I(u, v)$  называют **якобианом отображения (1)**.



## *Замечание.*

Формулы (1) рассматривались как отображение  $(G)$  на  $(\sigma)$ . Но им можно придать и другой геометрический смысл.

В силу однозначности соответствия  $(x,y) \rightarrow (u,v)$ , пару чисел  $(u,v)$  можно рассматривать как координаты точки  $M(x,y)$  в другой системе координат (*криволинейной системе координат*).

Тогда (1) – *связь криволинейных и декартовых* координат точки.

При такой интерпретации, применяя формулу (2), не потребуется находить область  $(G)$ .

## 5. Геометрические и физические приложения двойных интегралов

1) Объем  $V$  цилиндрического тела ( $V$ ), с основанием  $(\sigma) \in xOy$ , ограниченного сверху поверхностью  $z = f(x, y)$ :

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy$$

2) Площадь  $\sigma$  квадратуемой области  $(\sigma) \in xOy$ :

$$\sigma = \iint_{(\sigma)} dx dy$$

3) Площадь  $S$  гладкой поверхности ( $S$ ), заданной уравнением  $z = f(x, y)$ :

$$S = \iint_{(\sigma)} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$$

где  $(\sigma) \in xOy$  – проекция поверхности ( $S$ ) на плоскость  $xOy$ .

Пусть  $(\sigma)$  – материальная бесконечно тонкая пластинка  
(квадрируемая область  $(\sigma) \in xOy$ ) с плотностью  $\gamma(x,y)$ .

Тогда

$$4) \iint_{(\sigma)} \gamma(x,y) dx dy = m \quad - \text{масса пластинки } (\sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

$$5) \iint_{(\sigma)} y \cdot \gamma(x,y) dx dy = S_x, \quad \iint_{(\sigma)} x \cdot \gamma(x,y) dx dy = S_y$$

– статические моменты пластинки  $(\sigma)$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно



$$6) x_0 = \frac{S_y}{m}, \quad y_0 = \frac{S_x}{m} \quad - \text{координаты центра масс } (\sigma).$$

$$7) \iint_{(\sigma)} y^2 \cdot \gamma(x, y) dx dy = I_x, \quad \iint_{(\sigma)} x^2 \cdot \gamma(x, y) dx dy = I_y$$

– моменты инерции пластинки  $(\sigma)$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

$$8) I_o = I_x + I_y = \iint_{(\sigma)} (y^2 + x^2) \cdot \gamma(x, y) dx dy$$

– момент инерции пластинки  $(\sigma)$  относительно начала координат