Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: ***Интегралы, зависящие от параметра***

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

§6. Интегралы, зависящие от параметра

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $D = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid a \le x \le b,\ c_i \le y_i \le d_i\}$,

$z = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – определена и непрерывна в D.

Придадим переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ конкретные значения:

$y_1 = y_{10},\ y_2 = y_{20},\ \ldots,\ y_n = y_{n0}$ (где $c_i \le y_{i0} \le d_i$)

Рассмотрим функцию $z = f(x, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) = \varphi(x)$

Имеем: $\varphi(x)$ – непрерывна на $[a;b]$,

$\Rightarrow$ $\varphi(x)$ – интегрируема на $[a;b]$.

Пусть $\forall\alpha,\beta\in[a;b]$. Вычислим

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)dx = \underbrace{\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})dx}_{\textit{зависит от } y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}}$$

$\Rightarrow$ *функция, заданная на* $D_1=\{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid c_i\le y_i\le d_i\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Заданная на множестве

$$D_1 = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid c_i \le y_i \le d_i\} \subset \mathbb{R}^n$$

функция *n* переменных

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \underbrace{y_1, y_2, \ldots, y_n}_{const})dx$$

называется ***интегралом***, ***зависящим от параметров***.

Переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называются ***параметрами***.

Для простоты изложения будем далее рассматривать интегралы, зависящие от одного параметра.

Получившиеся результаты естественным образом будут переноситься на случай интегралов от любого конечного числа параметров.

ТЕОРЕМА 1 (о непрерывности интеграла, зависящего от параметра).

Пусть $z = f(x,y)$ *непрерывна в прямоугольнике*

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d\}$$

и $\forall \alpha, \beta \in [a;b]$.

Тогда функция $F(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx$ *непрерывна на* $[c;d]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 2 (о предельном переходе по параметру под знаком интеграла).

Пусть $z = f(x,y)$ *непрерывна в прямоугольнике*

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d\}$$

и $\forall \alpha, \beta \in [a;b]$, $\forall y_0 \in [c;d]$.

Тогда

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx .$$

ТЕОРЕМА 3 (о дифференцировании интеграла по параметру).

Пусть функции $z = f(x,y)$ *и* $f'_y(x,y)$ *непрерывны в прямоугольнике* $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ и $\forall \alpha, \beta \in [a;b]$.

Тогда функция $F(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx$ *дифференцируема на* $[c;d]$, *причем*

$$F'(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f'_y(x,y)dx \qquad (1)$$

Формула (1) называется ***правилом Лейбница***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 4 (о непрерывности интеграла, зависящего от параметра в случае переменных пределов интегрирования).

Пусть $z = f(x,y)$ *непрерывна в прямоугольнике*

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d\ \}\ ,$$

$\alpha(y)$ *и* $\beta(y)$ *непрерывны на* $[c;d]$, *причем*

$$a \le \alpha(y) \le b\ ,\quad a \le \beta(y) \le b\ ,\quad \forall y \in [c;d]\ .$$

Тогда функция $F(y) = \displaystyle\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx$ *непрерывна на* $[c;d]$.

ТЕОРЕМА 5 (о дифференцировании интеграла по параметру в случае переменных пределов интегрирования).

Пусть функции $z = f(x,y)$ *и* $f'_y(x,y)$ *непрерывны в прямоугольнике* $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$,

$\alpha(y)$ *и* $\beta(y)$ *дифференцируемы на* $[c;d]$, *причем*

$$a \le \alpha(y) \le b, \quad a \le \beta(y) \le b, \quad \forall y \in [c;d].$$

Тогда функция $F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ *дифференцируема на* $[c;d]$, *причем*

$$F'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + f(\beta(y),y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y),y) \cdot \alpha'(y).$$

2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть $z = f(x,y)$ непрерывна в области

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le +\infty\ ,\ c \le y \le d\ \}$$

и $\forall \alpha \in [a;+\infty)$.

Функция

$$F(y) = \int_{\alpha}^{+\infty} f(x, y)dx \qquad (2)$$

называется ***несобственным интегралом, зависящим от параметра***.

$F(y)$ определена на некотором подмножестве $Y \subseteq [c;d]$, состоящем из значений y, при которых интеграл (2) – сходится.

D[$F(y)$] называют ***областью сходимости интеграла*** (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Несобственный интеграл* (2) *называют* ***правильно сходящемся*** *на множестве* $Y \subseteq [c;d]$, *если существует такая функция* $\varphi(x)$, что

1) $|f(x,y)| \leq \varphi(x)$, $\forall y \in Y$, $\forall x \in [\alpha;+\infty)$;

2) $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} \varphi(x)dx$ – сходится.

Говорят: «интеграл (2) мажорируется сходящимся несобственным интегралом».

ТЕОРЕМА 6 (о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра).

Пусть $z = f(x,y)$ непрерывна в области

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq +\infty\ ,\ c \leq y \leq d\ \}$$

и $\forall \alpha \in [a;+\infty)$.

Если интеграл (2) сходится правильно на множестве $Y \subseteq [c;d]$, то он является на Y непрерывной функцией.

ТЕОРЕМА 7 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру).

Пусть функции $z = f(x,y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в области

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le +\infty\ ,\ c \le y \le d\ \}$$

и $\forall \alpha \in [a;+\infty)$.

Если несобственный интеграл $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f'_y(x, y)dx$ сходится правильно на множестве $Y \subseteq [c;d]$, то функция $F(y) = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x, y)dx$ дифференцируема на Y и справедлива формула

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x, y)dx\right) = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f'_y(x, y)dx.$$

3. Эйлеровы интегралы

Эйлеровы интегралы – два интеграла зависящих от параметра, специального вида.

1) Эйлеровым интегралом II рода (***γ-функцией***) называется интеграл вида

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t}\,dt.$$

СВОЙСТВА γ-функции:

а) $\Gamma(x)$ определена при $x > 0$.

б) $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ – ***формула понижения*** (или ***функциональное уравнение***).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

в) если $0 < x < 1$, то справедлива ***формула дополнения***:

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Из формулы дополнения, при $x=\frac{1}{2}$, получаем: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

г) если $n\in\mathbb{N}$, то справедливы равенства:

$$\Gamma(n)=(n-1)! \quad \text{и} \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2) Эйлеровым интегралом I рода (β-***функцией***) называется интеграл вида

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1}\, dt.$$

СВОЙСТВА β-функции:

а) $\mathrm{B}(x,y)$ определена в области $x > 0$, $y > 0$.

б) $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

в) Справедливо равенство:

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x+y}}\, dz.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

г) связь β-функции и γ-функции:

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что при $0 < x < 1$

$$\mathrm{B}(x, 1 - x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$