Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: ***Несобственные интегралы***

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

§5. Несобственные интегралы

Для существования $\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимы условия:

1) $[a;b]$ – конечен,

2) $f(x)$ – ограничена (необходимое условие существования определенного интеграла).

Несобственные интегралы – обобщение понятия определенного интеграла на случай когда одно из этих условий не выполнено.

1. Несобственные интегралы I рода (по бесконечному промежутку)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$.

$\Rightarrow y = f(x)$ непрерывна на $\forall [a;b]$, где $b \geq a$.

$\Rightarrow$ существует $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Имеем: $\int\limits_a^b f(x)dx = I(b)$, $D(I) = [a;+\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Несобственным интегралом I рода*** *от функции $f(x)$ по промежутку $[a;+\infty)$ называется предел функции $I(b)$ при $b \to +\infty$.*

Обозначают: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

При этом, если предел в правой части формулы (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

Если $y = f(x)$ непрерывна на $(-\infty;b]$, то аналогично определяется и обозначается ***несобственный интеграл*** I *рода для функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $(-\infty;b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Если $y = f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то ***несобственным интегралом*** *I рода для функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $(-\infty;+\infty)$ называют

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (2)$$

где c – любое число.

Несобственный интеграл от $f(x)$ по промежутку $(-\infty;+\infty)$ называется ***сходящимся***, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (2) сходятся.

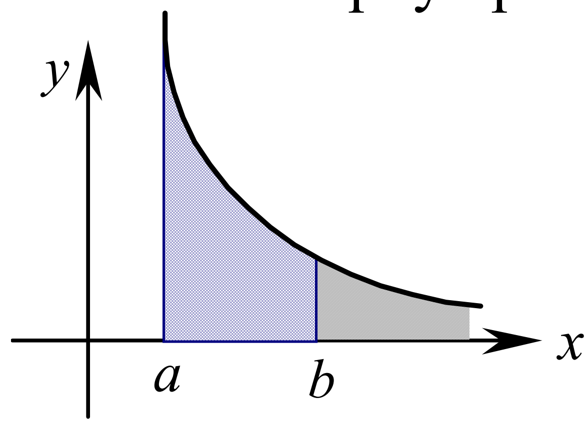
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку $(-\infty;+\infty)$ называется ***расходящимся***.

Будем рассматривать несобственные интегралы I рода по промежутку $[a;+\infty)$. Для интегралов по промежутку $(-\infty;b]$ и $(-\infty;+\infty)$ все полученные результаты останутся справедливы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов I рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;+\infty)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.



$\Rightarrow$ Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a;+\infty)$ сходится и равен S, то полагают, что область, ограниченная Ox, кривой $y = f(x)$ и прямой $x = a$ (криволинейная трапеция с бесконечным основанием) имеет площадь S.

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы I рода переносятся некоторые свойства определенных интегралов (свойства 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a;+\infty)$.

Тогда $\forall b \in [a;+\infty)$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \big(F(b) - F(a)\big)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) \qquad (3)$$

Обозначим $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}.$

Тогда (3) примет вид:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x)-F(a). \qquad (4)$$

Формулу (4) называют ***обобщением формулы Ньютона – Лейбница*** для несобственных интегралов по промежутку $[a;+\infty)$.

Аналогично для несобственных интегралов по промежутку $(-\infty;b]$ доказывается справедливость формулы

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b)-\lim_{x\to-\infty} F(x).$$

ПРИМЕРЫ. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$;

2) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$; $(a > 0)$

3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$; $(\alpha \neq 0)$

4) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4 + x^2}$;

5) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\alpha x} dx$; $(\alpha \neq 0)$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2}$.

2. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода

ТЕОРЕМА 1 (первый признак сравнения).

Пусть $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на* $[a;+\infty)$ *и*

$$0 \le f(x) \le \varphi(x)\,,\ \ \forall x \in [c;+\infty) \ \ (\text{где } c \ge a).$$

Тогда:

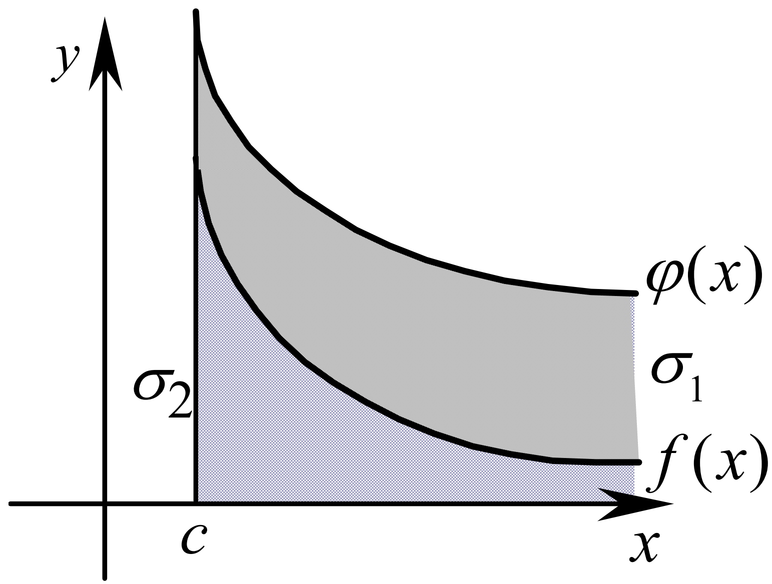
1) *если* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *– сходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *тоже сходится, причем*

$$\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_c^{+\infty} \varphi(x)dx;$$

2) *если* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *– расходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *тоже расходится.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы 1:

Пусть (σ_1) и (σ_2) – области в xOy , ограниченные осью Ox, прямой $x = c$ и кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = f(x)$ соответственно. Неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ (где $x \in [c;+\infty)$) означает, что область (σ_2) является частью области (σ_1).



$\Rightarrow$ 1) если область (σ_1) имеет площадь, то ее часть (σ_2) тоже имеет площадь;

2) если говорить о площади области (σ_2) нельзя, то и для содержащей ее области (σ_1) тоже нельзя говорить о площади.

ТЕОРЕМА 2 (второй признак сравнения)

Пусть $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны и неотрицательны на* $[a;+\infty)$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=h$, *где* h *– действительное число, отличное от нуля, то интегралы*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$$

ведут себя одинаково относительно сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Замечания.

1) Теорема 2 остается справедливой и в том случае, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и СОХРАНЯЮТ ЗНАК на $[a;+\infty)$.

2) При использовании теорем 1 и 2 в качестве «эталонных» интегралов обычно используют следующие несобственные интегралы:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} \quad - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{при} \ \ n>1, \\ \textit{расходится} & \textit{при} \ \ n \le 1. \end{cases}$$

$(a>0)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \ - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{при} \ \ \alpha>0, \\ \textit{расходится} & \textit{при} \ \ \alpha \le 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость интегралы

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}$; 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$; 3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$.
Тогда определены несобственные интегралы

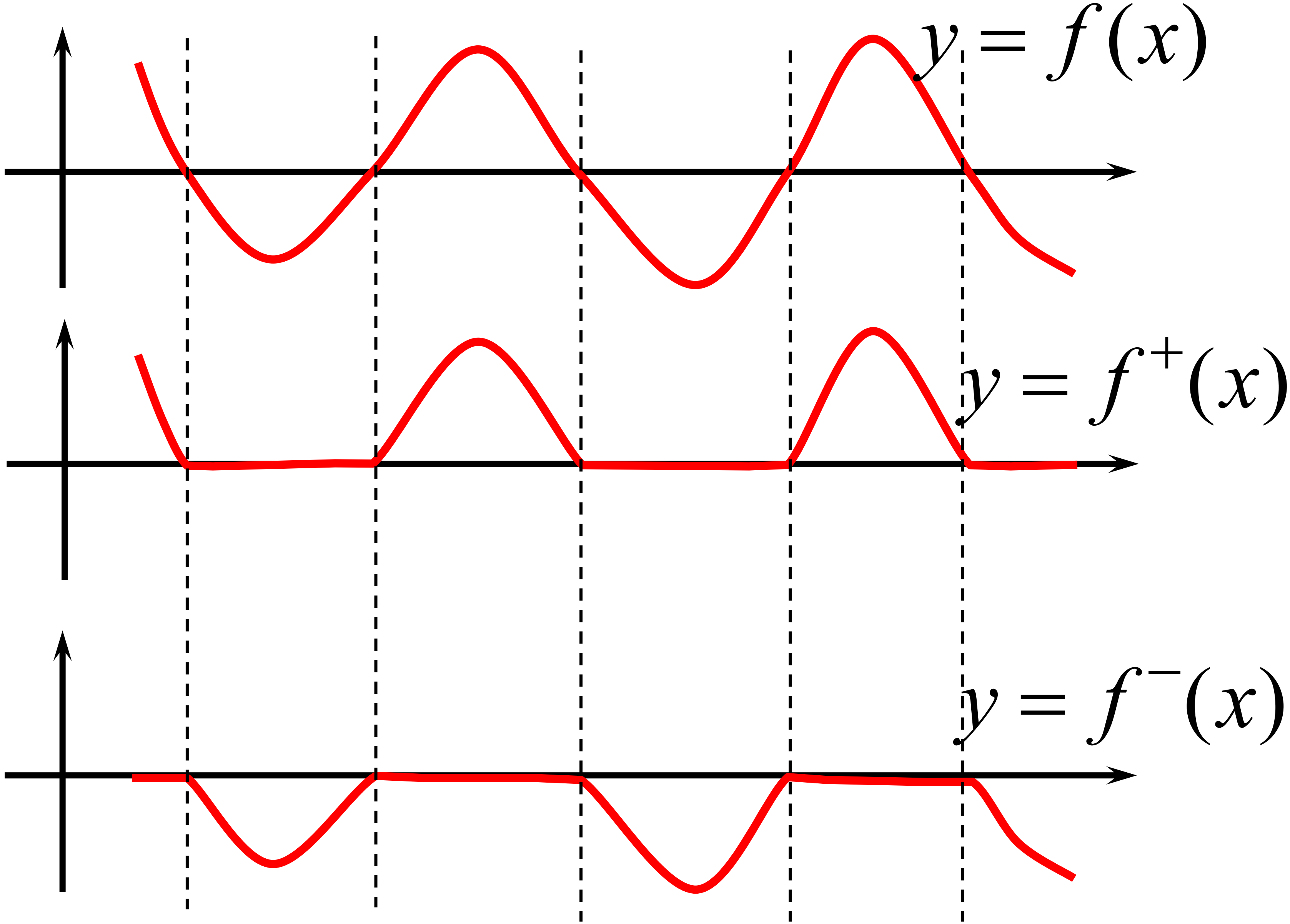
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

ТЕОРЕМА 3 (признак абсолютной сходимости).

Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, *то и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *тоже будет сходиться.*

При этом интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *называется* ***абсолютно сходящимся***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



$y = f(x)$
$y = f^+(x)$
$y = f^-(x)$

ПРИМЕР. Абсолютно сходятся интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2} \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{1+x^2}.$$

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится, то об интеграле $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ничего сказать нельзя. Он может расходиться, а может и сходиться.

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ *расходится, а* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *– сходится, то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *называют* ***условно сходящимся***.

ПРИМЕР. Условно сходится интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

3. Несобственные интегралы II рода (от неограниченных функций)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +(-)\infty$

$\Rightarrow y = f(x)$ непрерывна на $\forall [a;b_1]$, где $a \le b_1 < b$.

$\Rightarrow$ существует $\displaystyle\int_a^{b_1} f(x)dx$

Имеем: $\displaystyle\int_a^{b_1} f(x)dx = I(b_1)$, $D(I) = [a;b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Несобственным интегралом* II *рода*** *по промежутку* $[a;b]$ *от функции* $f(x)$, *неограниченной в точке* b, *называется предел функции* $I(b_1)$ *при* $b_1 \to b-0$.

Обозначают: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} I(b_1) = \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx \qquad (5)$$

При этом, если предел в правой части формулы (5) существует и конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

Если $y = f(x)$ непрерывна на $(a;b]$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +(-)\infty$, то аналогично определяется и обозначается ***несобственный интеграл*** *II рода* ***по промежутку*** $[a;b]$ *от функции* $f(x)$, ***неограниченной в точке а*** **:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int_{a_1}^{b} f(x)dx.$$

Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]\backslash\{c\}$ и $x = c$ – точка бесконечного разрыва функции, то ***несобственным интегралом*** II *рода от функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $[a;b]$ называют

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (6)$$

Несобственный интеграл по промежутку $[a;b]$ от функции $f(x)$, неограниченной внутри этого отрезка, называется ***сходящимся***, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (6) сходятся.

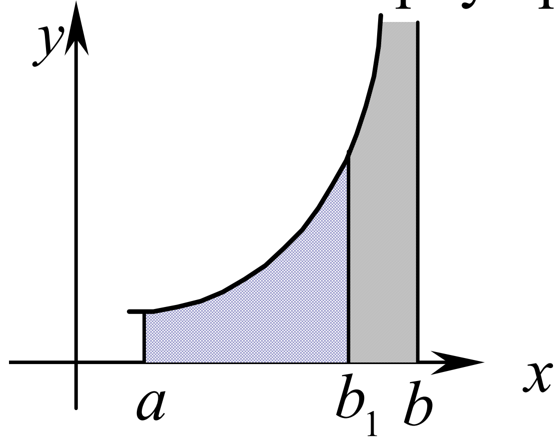
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку $[a;b]$ называется ***расходящимся***.

Будем рассматривать несобственные интегралы II рода по промежутку $[a;b]$ от функции, неограниченной в точке b . Для других несобственных интегралов II рода все полученные результаты останутся справедливы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов II рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b)$.

Тогда $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b_1]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.



$\Rightarrow$ Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a;b]$ сходится и равен S, то полагают, что область, ограниченная Ox, кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (неограниченная криволинейная трапеция) имеет площадь S.

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы II рода переносятся те же свойства определенных интегралов, что и для сходящихся интегралов I рода (свойства 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов II рода также существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a;b)$.

Тогда $\forall b_1 \in [a;b)$ имеем

$$\int_a^{b_1} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b_1} = F(b_1) - F(a)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} \big(F(b_1) - F(a)\big)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{b} f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} F(b_1) - F(a) \qquad (7)$$

Ранее вводили обозначение: $F(b-0)=\lim\limits_{b_1\to b-0}F(b_1)$

$$\Rightarrow \lim_{b_1\to b-0}F(b_1)-F(a)=F(b-0)-F(a)=F(x)\Big|_a^{b-0}.$$

Тогда (7) примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^{b-0}=\lim_{x\to b-0}F(x)-F(a). \qquad (8)$$

Формулу (8) называют ***обобщением формулы Ньютона – Лейбница*** для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке b.

Аналогично для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке a, доказывается справедливость формулы

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_{a+0}^{b}=F(b)-\lim_{x\to a+0}F(x).$$

ПРИМЕРЫ. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1)\ \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}; \qquad 2)\ \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}; \qquad 3)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Сформулированные в п.2 признаки сходимости несобственных интегралов (теоремы 1, 2 и 3) останутся справедливы и для несобственных интегралов II рода.

При использовании теорем 1 и 2 в роли «эталонных» интегралов используют интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} \quad - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{при}\ \ n<1, \\ \textit{расходится} & \textit{при}\ \ n\geq 1. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} \quad - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{при}\ \ n<1, \\ \textit{расходится} & \textit{при}\ \ n\geq 1. \end{cases}$$

Замечание.

Некоторым расходящимся несобственным интегралам можно приписать определенное числовое значение. А именно:

1) Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ – расходится, но $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{+N} f(x)dx = A$,

то число A называют ***главным значением*** этого ***несобственного интеграла***.

2) ***Главным значением*** расходящегося интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$

от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке $c\in[a;b]$ называют число A, равное

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\delta} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right) = A.$$

Обозначают соответствено: $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, $\quad v.p.\int\limits_a^b f(x)dx$.