

Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: *Замена переменной, интегрирование по частям в определенном интеграле.  
Применение определенного интеграла*

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

## 2. Замена переменной в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 3 (о замене переменной в определенном интеграле).

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a;b]$  (или  $[b;a]$ ) и функция  $x = \varphi(t)$  удовлетворяет условиям

1)  $\varphi(t)$  непрерывно дифференцируема на отрезке с концами  $\alpha$  и  $\beta$ ;

2)  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  и значения  $\varphi(t)$  при изменении  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$  не выходят за пределы отрезка с границами  $a$  и  $b$ .

Тогда функция  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  интегрируема на  $[\alpha;\beta]$  (или  $[\beta;\alpha]$ ) и справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (3)$$

Формула (3) называется **формулой замены переменной в определенном интеграле**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ПРИМЕР. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

*Замечание.* Замена переменной в определенном интеграле чаще производится по формуле (3), прочитанной справа налево:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_a^b f(t) dt,$$

где  $t = \varphi(x)$ ,  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ .

ПРИМЕР. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{4e^{2x} + 12e^x + 34}$

### 3. Формула интегрирование по частям в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 4.

Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  непрерывно дифференцируемы на  $[a;b]$ . Тогда существуют интегралы

$$\int_a^b u dv \quad \text{и} \quad \int_a^b v du$$

и справедливо равенство

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (4)$$

Формула (4) называется **формулой интегрирования по частям в определенном интеграле**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

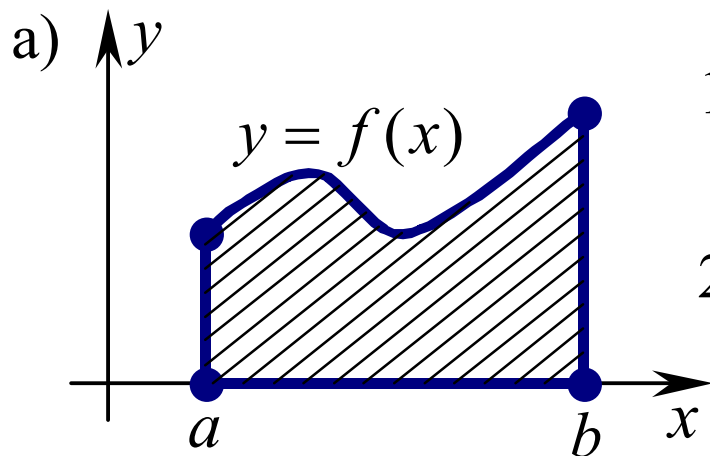
## §3. Приложения определенных интегралов

### 1. Площадь плоской области

#### I) *Плоская область в декартовой системе координат*

В ДСК **основная область**, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – **криволинейная трапеция**.

Возможны 3 случая ее расположения на плоскости:

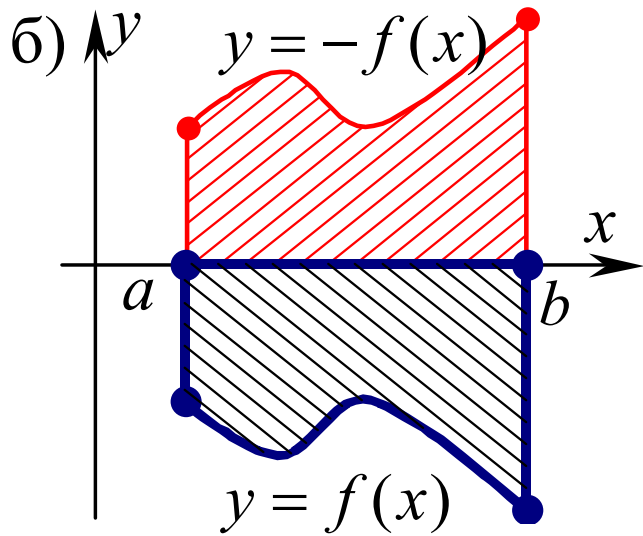


1) 
$$S = \int_a^b f(x) dx;$$

2) если  $y = f(x): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то 
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt,$$

где  $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ .

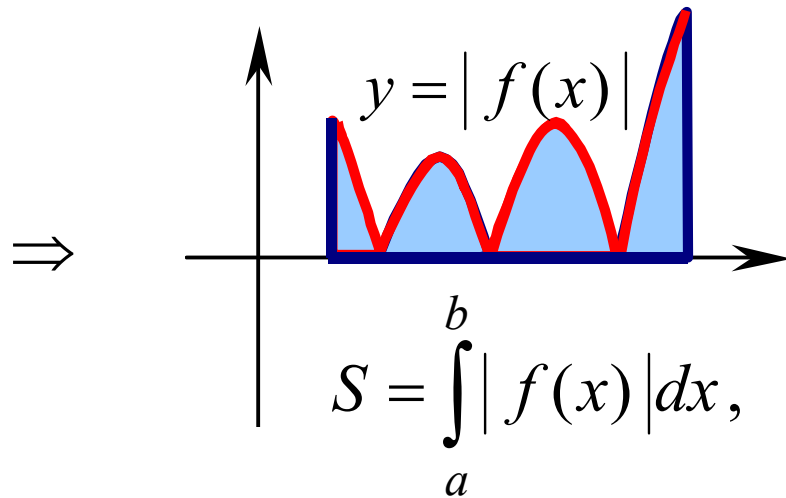
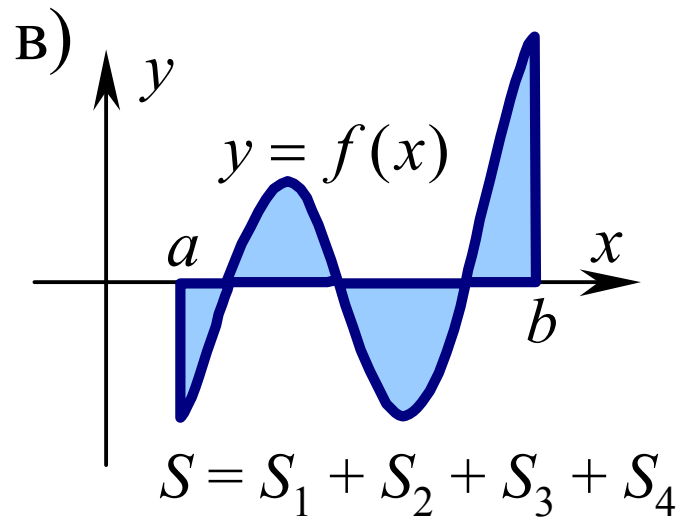


1) 
$$S = -\int_a^b f(x) dx,$$

2) если  $y = f(x)$ : 
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то 
$$S = -\int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t) dt,$$

где  $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ .



Кроме того, в ДСК с помощью определенного интеграла можно найти площадь области, **правильной в направлении оси  $Oy$** .

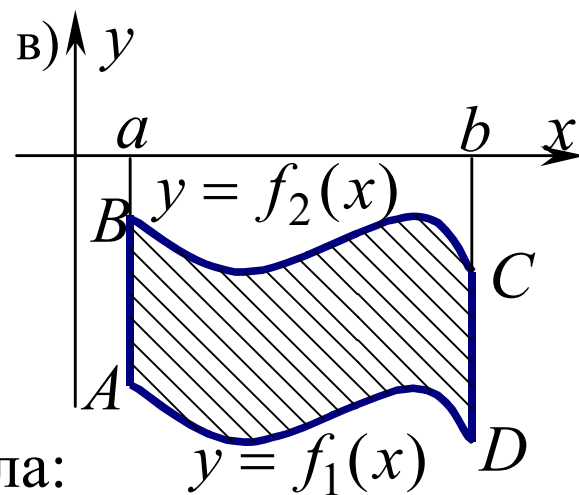
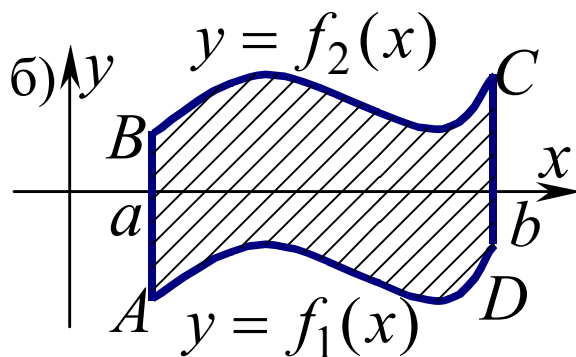
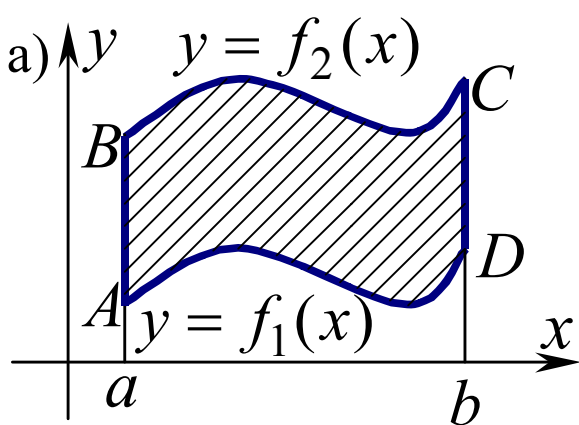
Правильной в направлении оси  $Oy$  является область  $(\sigma)$ , ограниченная линиями

$$x = a, x = b, y = f_1(x), y = f_2(x),$$

где  $a < b$  и  $f_1(x) \leq f_2(x), \forall x \in [a; b]$ .

**Замечание.** Прямые  $x = a$  и  $x = b$  могут вырождаться в точки.

Возможны 3 случая расположения области  $(\sigma)$  на плоскости:



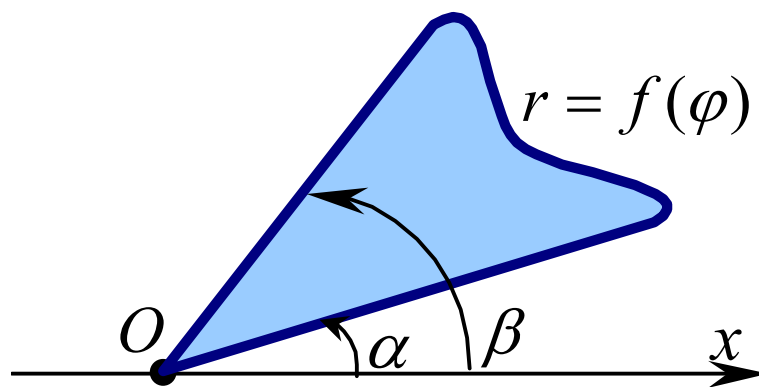
Во всех трех случаях справедлива формула:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

## II) Плоская область в полярной системе координат

В ПСК **основная область**, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – **криволинейный сектор**.

**Криволинейным сектором** называется область, ограниченная двумя лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и кривой  $r = f(\varphi)$ .



Его площадь находится по формуле: 
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



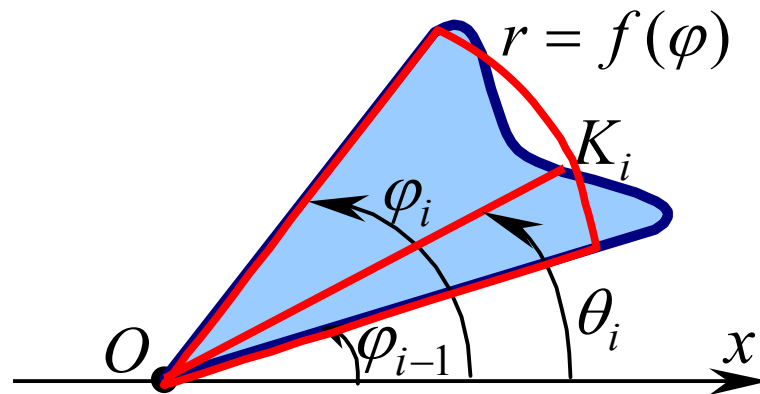
1) Разобьем  $[\alpha; \beta]$  на  $n$  частей точками

$\varphi_0 = \alpha, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n = \beta,$   
где  $\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n$ .

$\Rightarrow$  Сектор  $(\sigma)$  разобьется на  $n$  частей  $(\sigma_1), (\sigma_2), \dots, (\sigma_n)$   
лучами  $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1, \dots, \varphi = \varphi_n$ .

$\Rightarrow S = \sum S_i$ , где  $S_i$  – площадь части  $(\sigma_i)$

2) На каждом  $[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$  выберем произвольную точку  $\theta_i$ .



Заменим криволинейный сектор  $(\sigma_i)$  круговым сектором с радиусом  $OK_i = f(\theta_i)$ .

Имеем: 
$$S_i \approx S_{\text{круг. сек.}} = \frac{\pi \cdot [f(\theta_i)]^2}{2\pi} \cdot \Delta\varphi_i,$$

где  $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$  — величина угла сектора ( $\sigma_i$ )

$$\Rightarrow S_i \approx \frac{1}{2} \cdot [f(\theta_i)]^2 \cdot \Delta\varphi_i \quad \text{и} \quad S \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot [f(\theta_i)]^2 \cdot \Delta\varphi_i.$$

Тогда 
$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot [f(\theta_i)]^2 \cdot \Delta\varphi_i}_{\text{интегральная сумма для } \frac{1}{2}[f(\varphi)]^2 \text{ на отрезке } [\alpha; \beta].}$$
 где  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta\varphi_i$ .

Следовательно, 
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

## 2. Длина плоской кривой

### I) *Плоская кривая в декартовой системе координат*

Пусть  $y = f(x)$  – непрерывно дифференцируема на  $[a;b]$ .

ЗАДАЧА: найти длину  $\ell$  кривой  $y = f(x)$ , где  $x \in [a;b]$ .

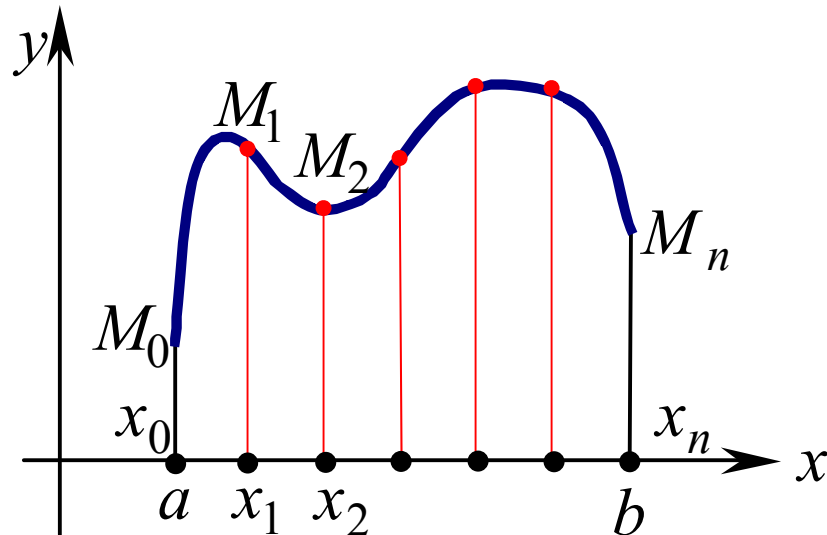
### РЕШЕНИЕ

Разобьем  $[a;b]$  на  $n$  частей точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n)$$

$\Rightarrow$   $(\ell)$  разобьется на части  $(\ell_1), (\ell_2), \dots, (\ell_n)$  точками  $M_0, M_1, \dots, M_n$

$\Rightarrow \ell = \sum \ell_i$ , где  $\ell_i$  – длина  $(\ell_i)$

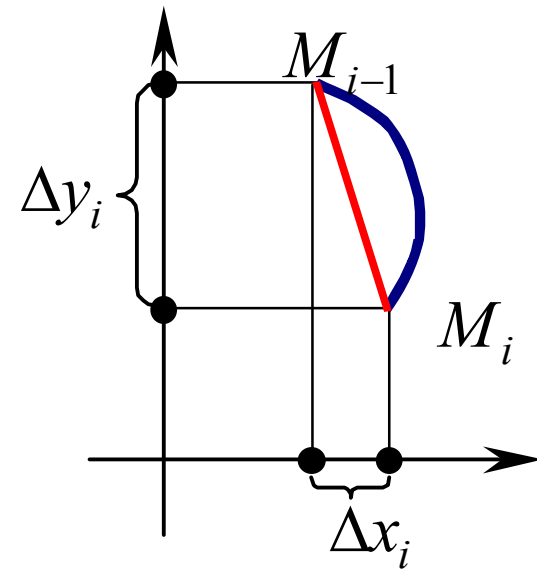


Рассмотрим дугу ( $\ell_i$ ).

Если ( $\ell_i$ ) мала, то

$$\ell_i \approx |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ .



По теореме Лагранжа

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

где  $\xi_i$  — точка между  $x_{i-1}$  и  $x_i$ .

$$\Rightarrow \ell_i \approx \sqrt{[\Delta x_i]^2 + [f'(\xi_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \ell \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i, \quad \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i.$$

$$\Rightarrow \ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$