

Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: *Замена переменной, интегрирование по частям в определенном интеграле.
Применение определенного интеграла*

Лектор Пахомова Е.Г.

2013 г.

2. Замена переменной в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 3 (о замене переменной в определенном интеграле).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ (или $[b;a]$) и функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет условиям

1) $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке с концами α и β ;

2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и значения $\varphi(t)$ при изменении t от α до β не выходят за пределы отрезка с границами a и b .

Тогда функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ интегрируема на $[\alpha;\beta]$ (или $[\beta;\alpha]$) и справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (3)$$

Формула (3) называется **формулой замены переменной в определенном интеграле**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Замечание. Замена переменной в определенном интеграле чаще производится по формуле (3), прочитанной справа налево:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_a^b f(t) dt,$$

где $t = \varphi(x)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{e^x dx}{4e^{2x} + 12e^x + 34}$

3. Формула интегрирование по частям в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 4.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a;b]$. Тогда существуют интегралы

$$\int_a^b u dv \quad \text{и} \quad \int_a^b v du$$

и справедливо равенство

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (4)$$

Формула (4) называется **формулой интегрирования по частям в определенном интеграле**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

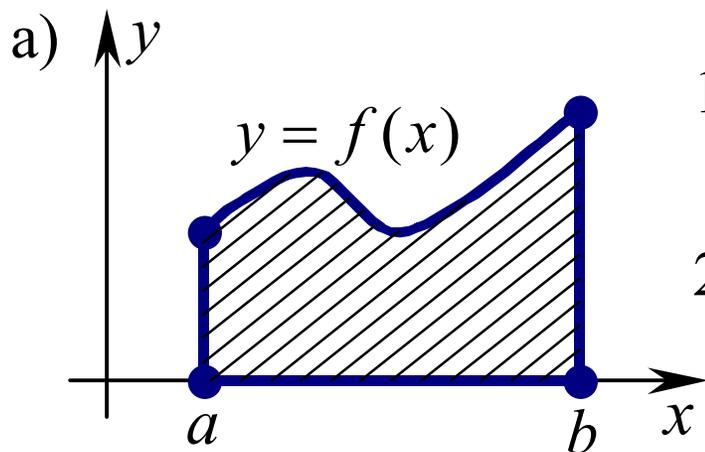
§3. Приложения определенных интегралов

1. Площадь плоской области

I) *Плоская область в декартовой системе координат*

В ДСК **основная область**, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – **криволинейная трапеция**.

Возможны 3 случая ее расположения на плоскости:

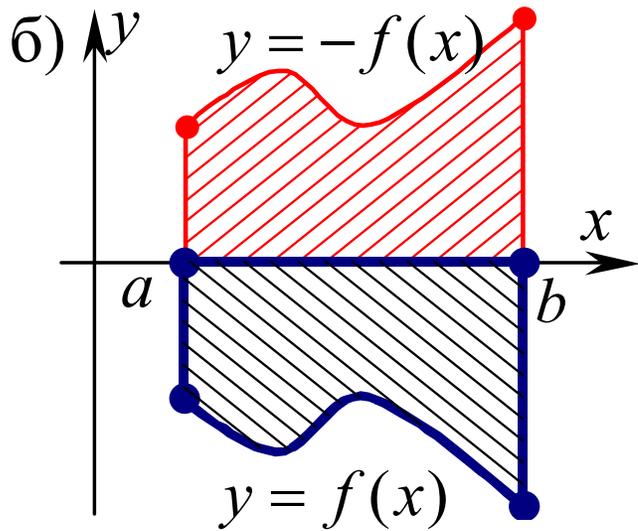


$$1) \quad S = \int_a^b f(x) dx;$$

$$2) \quad \text{если } y = f(x): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

$$\text{то } S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt,$$

где $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$.

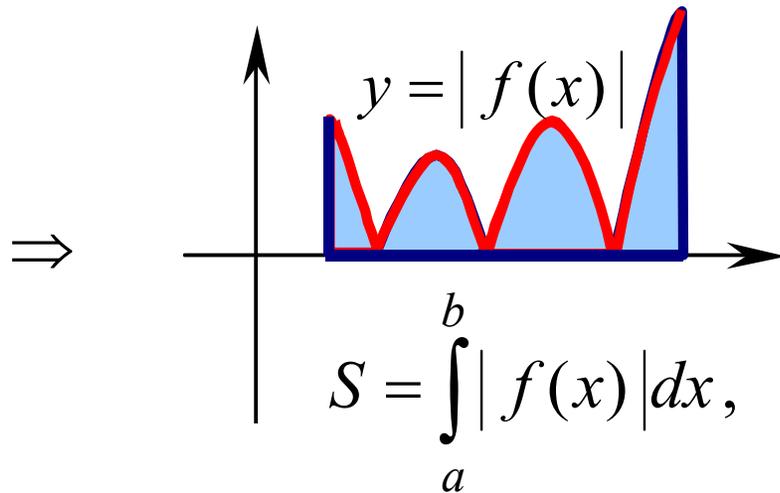
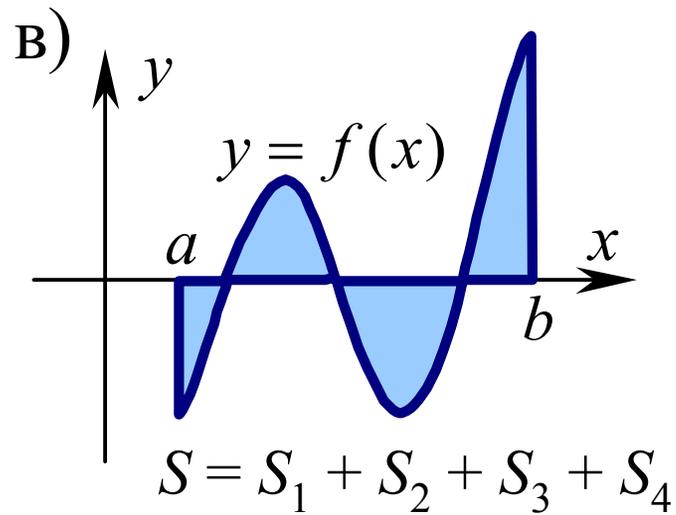


1)
$$S = -\int_a^b f(x) dx,$$

2) если $y = f(x): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то
$$S = -\int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t) dt,$$

где $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$.



Кроме того, в ДСК с помощью определенного интеграла можно найти площадь области, **правильной в направлении оси Oy** .

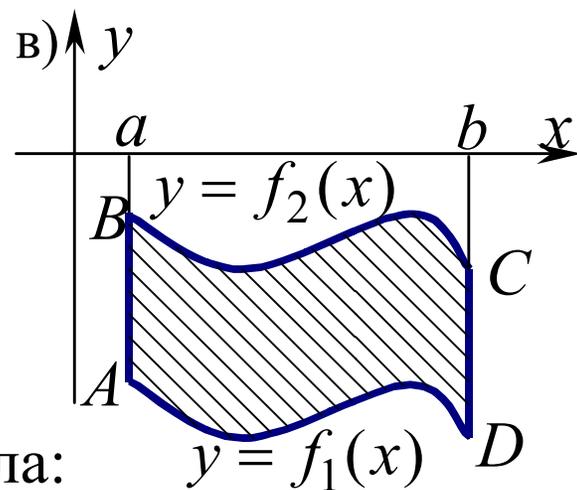
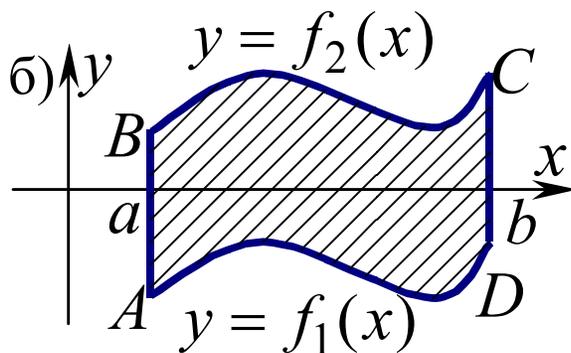
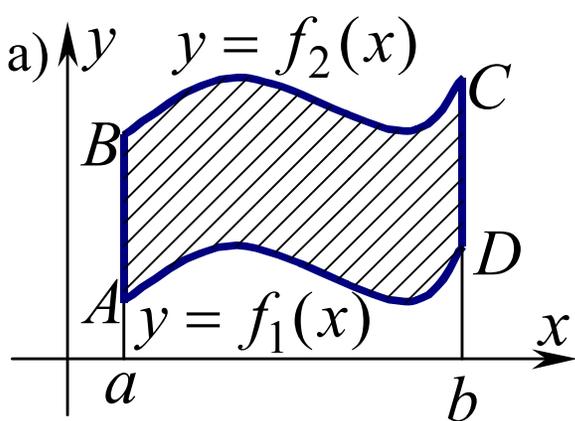
Правильной в направлении оси Oy является область (σ) , ограниченная линиями

$$x = a, x = b, y = f_1(x), y = f_2(x),$$

где $a < b$ и $f_1(x) \leq f_2(x), \forall x \in [a; b]$.

Замечание. Прямые $x = a$ и $x = b$ могут вырождаться в точки.

Возможны 3 случая расположения области (σ) на плоскости:



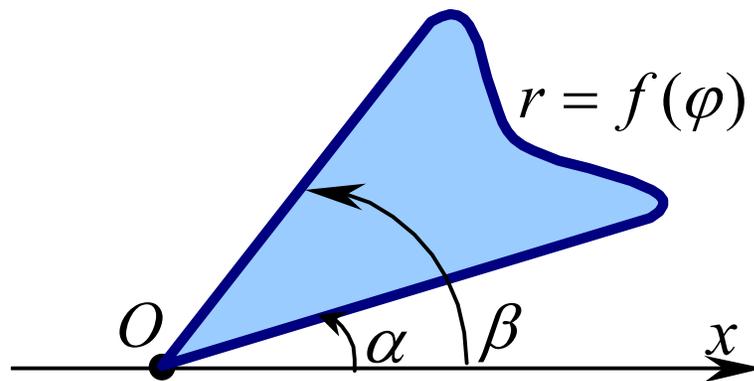
Во всех трех случаях справедлива формула:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

II) Плоская область в полярной системе координат

В ПСК **основная область**, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – **криволинейный сектор**.

Криволинейным сектором называется область, ограниченная двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$.



Его площадь находится по формуле:
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

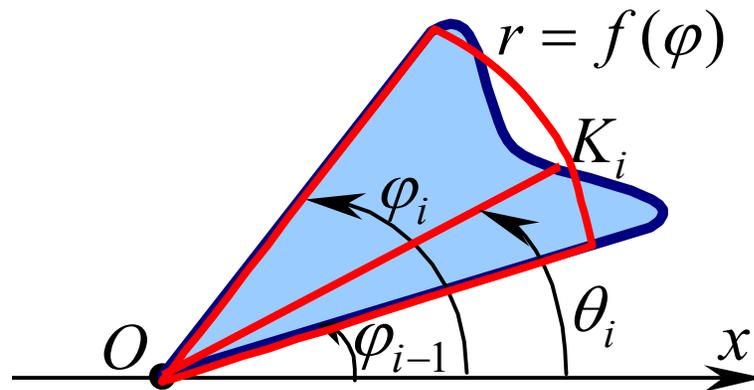
1) Разобьем $[\alpha; \beta]$ на n частей точками

$\varphi_0 = \alpha, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n = \beta,$
где $\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n$.

\Rightarrow Сектор (σ) разобьется на n частей $(\sigma_1), (\sigma_2), \dots, (\sigma_n)$
лучами $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1, \dots, \varphi = \varphi_n$.

$\Rightarrow S = \sum S_i$, где S_i – площадь части (σ_i)

2) На каждом $[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$ выберем произвольную точку θ_i .



Заменим криволинейный сектор (σ_i) круговым сектором с радиусом $OK_i = f(\theta_i)$.

Имеем:
$$S_i \approx S_{\text{круг. сек.}} = \frac{\pi \cdot [f(\theta_i)]^2}{2\pi} \cdot \Delta\varphi_i,$$

где $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ — величина угла сектора (σ_i)

$$\Rightarrow S_i \approx \frac{1}{2} \cdot [f(\theta_i)]^2 \cdot \Delta\varphi_i \quad \text{и} \quad S \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot [f(\theta_i)]^2 \cdot \Delta\varphi_i.$$

Тогда
$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot [f(\theta_i)]^2 \cdot \Delta\varphi_i}_{\text{интегральная сумма для } \frac{1}{2}[f(\varphi)]^2 \text{ на отрезке } [\alpha; \beta].}$$
 где $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta\varphi_i$.

Следовательно,
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

2. Длина плоской кривой

I) *Плоская кривая в декартовой системе координат*

Пусть $y = f(x)$ – непрерывно дифференцируема на $[a;b]$.

ЗАДАЧА: найти длину ℓ кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$.

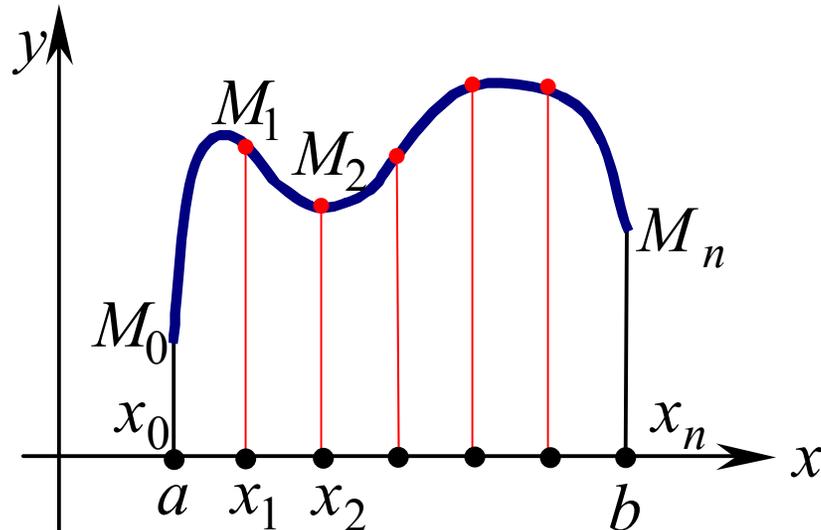
РЕШЕНИЕ

Разобьем $[a;b]$ на n частей точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n)$$

\Rightarrow (ℓ) разобьется на части $(\ell_1), (\ell_2), \dots, (\ell_n)$ точками M_0, M_1, \dots, M_n

$\Rightarrow \ell = \sum \ell_i$, где ℓ_i – длина (ℓ_i)

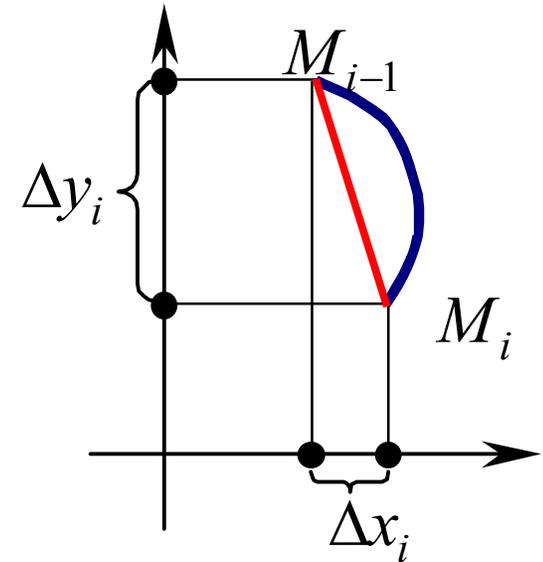


Рассмотрим дугу (ℓ_i).

Если (ℓ_i) мала, то

$$\ell_i \approx |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.



По теореме Лагранжа

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

где ξ_i — точка между x_{i-1} и x_i .

$$\Rightarrow \ell_i \approx \sqrt{[\Delta x_i]^2 + [f'(\xi_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \ell \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i, \quad \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i.$$

$$\Rightarrow \ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$