§ 14. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Интегрирование функций $R\left[x,\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_1},\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_2},\ldots,\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_k}\right]$, где $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$ – рациональные числа.

Интеграл вида

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_1},\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_2},\ldots,\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_k}\right]dx \qquad (1)$$

сводится к интегралу от рациональной функции с помощью замены

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$.

Действительно, в этом случае

$$x=\frac{b_1\cdot t^s-b}{a-a_1\cdot t^s}, \quad \Rightarrow \; dx=\frac{s(ab_1-a_1b)t^{s-1}}{(a-a_1\cdot t^s)^2}dt;$$

$$\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_1}=t^{n_1}, \quad \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_2}=t^{n_2}, \ldots, \quad \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_k}=t^{n_k},$$

где n_1, n_2, …, n_k – целые. Тогда

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_1},\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_2},\ldots,\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_k}\right]dx=$$

$$=\int R\left[\left(\frac{b_1\cdot t^s-b}{a-a_1\cdot t^s}\right),t^{n_1},t^{n_2},\ldots,t^{n_k}\right]\cdot\frac{s(ab_1-a_1b)t^{s-1}}{(a-a_1\cdot t^s)^2}dt=\int R_1(t)dt.$$

Частным случаем интегралов (1) являются интегралы вида $\int R[x,(ax+b)^{\beta_1},(ax+b)^{\beta_2},\ldots,(ax+b)^{\beta_k}]dx$ и $\int R(x,x^{\beta_1},x^{\beta_2},\ldots,x^{\beta_k})dx$. Они рационализируются (т.е. приводятся к интегралу от рациональной функции) с помощью соответственно подстановок

$$ax+b=t^s \quad \text{и} \quad x=t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$.

ПРИМЕР 1. Найти интеграл $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$

Подынтегральная функция имеет вид $R(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{4}})$, поэтому сделаем замену $x = t^4$. Тогда $dx = 4t^3dt$ и

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+\sqrt[4]{t^4}}{t^4+\sqrt{t^4}} \cdot 4t^3dt = 4\int \frac{(1+t)t^3}{t^4+t^2}dt = 4\int \frac{(1+t)t}{t^2+1}dt =$$

$$= 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt = 4\int \left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = 4\left(\int dt + \int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= 4\left(t + \int \frac{tdt}{t^2+1} \cdot \frac{d(t^2+1)}{2t} - \operatorname{arctg} t\right) = 4\left(t + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t\right) =$$

$$= 4t + 2\ln(t^2+1) - 4\operatorname{arctg} t + C$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = 4\sqrt[4]{x} + 2\ln(\sqrt{x}+1) - 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C.$$

ПРИМЕР 2. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\cdot(1+\sqrt[6]{x-1})}dx$.

Подынтегральная функция имеет вид $R(x, (x-1)^{\frac{1}{3}}, (x-1)^{\frac{1}{4}}, (x-1)^{\frac{1}{6}})$, поэтому сделаем замену $x-1 = t^{12}$. Тогда $dx = 12t^{11}dt$ и

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\cdot(1+\sqrt[6]{x-1})}dx = \int \frac{\sqrt[3]{t^{12}}+\sqrt[4]{t^{12}}}{t^{12}(1+\sqrt[6]{t^{12}})} \cdot 12t^{11}dt = 12\int \frac{t^{11}(t^4+t^3)dt}{t^{12}(1+t^2)} =$$

$$= 12\int \frac{(t^3+t^2)dt}{1+t^2} = 12\int \left(t+1-\frac{t+1}{1+t^2}\right)dt = 12\left(\frac{t^2}{2}+t-\int \frac{tdt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) =$$

$$= 12\left(\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}\int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} - \operatorname{arctg} t\right) = 12\left(\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \operatorname{arctg} t\right) + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно получаем

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\cdot(1+\sqrt[6]{x-1})}dx = 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x-1}) - 12\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x-1} + C.$$

2. Интегрирование дифференциального бинома.

Дифференциальным биномом называется выражение вида $x^m(a+bx^n)^p$, где m,n,p – рациональные числа, a,b – действительные числа.

Как доказал П.Л. Чебышев, интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ выражается через элементарные функции только в трех случаях:

1) p – целое число. Тогда данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью замены $x=t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число. В этом случае интеграл рационализируется с помощью замены $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби p.

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое число. Чтобы рационализировать интеграл, необходимо сделать замену $\dfrac{a+bx^n}{x^n}=t^s$, где s – знаменатель дроби p.

ПРИМЕР. 1. Найти интеграл $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$.

Это интеграл от дифференциального бинома:

$$x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}=x^5(1+x^3)^{\frac{2}{3}},$$

где $m=5$, $n=3$, $p=\dfrac{2}{3}$. Так как число $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{5+1}{3}=2$ является целым, то интеграл выражается через элементарные функции. Чтобы рационализировать интеграл, необходимо сделать замену $1+x^3=t^3$. Откуда находим

$$x=\sqrt[3]{t^3-1},\qquad dx=\frac{t^2dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^2}}$$

и

$$\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx=\int\left(\sqrt[3]{t^3-1}\right)^5\sqrt[3]{t^6}\cdot\frac{t^2dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^2}}=\int\left(\sqrt[3]{t^3-1}\right)^3t^4dt=$$

$$=\int(t^7-t^4)dt=\frac{t^8}{8}-\frac{t^5}{5}+C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получаем

$$\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx=\frac{1}{8}\left(\sqrt[3]{1+t^3}\right)^8-\frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{1+t^3}\right)^5+C.$$

ПРИМЕР. 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Это интеграл от дифференциального бинома:

$$\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}} = x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

где $m=-4$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$. Так как $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-4+1}{2}-\frac{1}{2}=-2$ – целое число, то интеграл выражается через элементарные функции. Чтобы рационализировать интеграл, необходимо сделать замену $\frac{1+x^2}{x^2}=t^2$. Откуда находим $x=\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$, $dx=-\frac{tdt}{\sqrt{(t^2-1)^3}}$

и

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)^4\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)^2}} \cdot \frac{(-tdt)}{\sqrt{(t^2-1)^3}} =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{(t^2-1)^2}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}} \cdot \frac{(-tdt)}{\sqrt{(t^2-1)^3}} = -\int \frac{(t^2-1)^2\cdot\sqrt{t^2-1}\cdot tdt}{t\cdot\sqrt{(t^2-1)^3}} =$$

$$= -\int (t^2-1)dt = -\frac{t^3}{3}+t+C.$$

Из $\frac{1+x^2}{x^2}=t^2$ теперь находим, что $t=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. Подставляя это выражение в результат интегрирования, окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

3. Интегрирование функций вида $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Среди интегралов от иррациональных функций большое практическое применение имеют интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Имеется два способа их нахождения.

1) С помощью тригонометрических подстановок.

Выделим полный квадрат под знаком радикала:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x\right)+c} = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a^2}},$$

а затем сделаем замену $u = \sqrt{|a|}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)$.

В результате получим один из следующих интегралов:

$$\int R_1\left(u, \sqrt{q^2-u^2}\right)du \quad \text{или} \quad \int R_1\left(u, \sqrt{q^2+u^2}\right)du \quad \text{или} \quad \int R_1\left(u, \sqrt{u^2-q^2}\right)du.$$

Эти интегралы в свою очередь сводятся к интегралу от функции вида $R(\sin t, \cos t)$, способы нахождения которых мы рассмотрели в предыдущем параграфе. Делается это с помощью одной из трех подстановок, называемых *тригонометрическими*:

1) $u = q\sin t$ (или $u = q\cos t$) для $R(u, \sqrt{q^2-u^2})$;

2) $u = q\,\mathrm{tg}\,t$ (или $u = q\,\mathrm{ctg}\,t$) для $R(u, \sqrt{q^2+u^2})$;

3) $u = \frac{q}{\cos t}$ (или $u = \frac{q}{\sin t}$) для $R(u, \sqrt{u^2-q^2})$.

После их применения под знаком корня оказывается квадрат некоторой тригонометрической функции, что и позволяет избавиться от иррациональности.

ПРИМЕР 1. Найти интеграл $\int \sqrt{4-x^2}dx$.

Полагаем $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t dt$

и $$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = \sqrt{4\cos^2 t} = 2\cos t.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = \int 2\cos t\cdot 2\cos t dt = 4\int \cos^2 t dt = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = 2t+\sin 2t+C.$$

Теперь из $x = 2\sin t$ находим, что $t = \arcsin\frac{x}{2}$ и, подставляя в результат интегрирования, окончательно получаем

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right) + C.$$

Замечание. Так как

$$\sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)$$

и $$\cos(\arcsin\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2},$$

то окончательный ответ можно записать в виде

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

ПРИМЕР 2. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-4)^5}}$.

Полагаем $x = \frac{2}{\cos t}$. Тогда $dx = \frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt$

и $$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4} = \sqrt{\frac{4(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{4\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{2\sin t}{\cos t}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-4)^5}} = \int\frac{\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{2}{\cos t}\cdot\left(\frac{2\sin t}{\cos t}\right)^5} = \int\frac{2\sin t\cdot\cos^6 t}{\cos^2 t\cdot 2^6\sin^5 t}dt = \frac{1}{32}\int\operatorname{ctg}^4 t\,dt.$$

Чтобы найти получившийся интеграл, еще раз сделаем замену. Полагаем $z = \operatorname{ctg} t$. Тогда $t = \operatorname{arcctg} z$, $dt = -\frac{dz}{1+z^2}$ и

$$\int\operatorname{ctg}^4 t\,dt = \int z^4\cdot\left(\frac{-dz}{1+z^2}\right) = -\int\left(z^2-1+\frac{1}{1+z^2}\right)dz = -\frac{z^3}{3} + z - \operatorname{arctg} z + C_1$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^3 t}{3} + \operatorname{ctg} t - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} t) + C_1.$$

Так как $\operatorname{arctg}\alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\alpha$, то получившийся ответ можно записать

в виде $$\int\operatorname{ctg}^4 t\,dt = -\frac{\operatorname{ctg}^3 t}{3} + \operatorname{ctg} t - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t)\right) + C_1 =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^3 t}{3} + \operatorname{ctg} t + t + C,$$

где $C = C_1 - \frac{\pi}{2}$. Теперь из $x = \frac{2}{\cos t}$ находим, что $t = \arccos\frac{2}{x}$ и

$$\int \operatorname{ctg}^4 t dt = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\left(\arccos\frac{2}{x}\right) + \operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{2}{x}\right) + \arccos\frac{2}{x} + C.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-4)^5}} = \frac{1}{32}\left(-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\left(\arccos\frac{2}{x}\right) + \operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{2}{x}\right) + \arccos\frac{2}{x}\right) + C.$$

Замечание. Используя формулу $\operatorname{ctg}(\arccos\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, окончательный ответ можно записать в виде

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-4)^5}} = \frac{1}{32}\left(-\frac{1}{3}\frac{8}{\sqrt{(x^2-4)^3}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} + \arccos\frac{2}{x}\right) + C.$$

ПРИМЕР 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$.

Выделим полный квадрат в под знаком радикала:

$$5 + 2x + x^2 = (x+1)^2 + 4$$

и сделаем замену

$$u = x + 1$$

$$\Rightarrow \quad x = u - 1, \quad dx = du.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{((x+1)^2+4)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+4)^3}}.$$

Получившийся интеграл можно найти двумя способами: 1) это интеграл от дифференциального бинома, для которого число $\frac{m+1}{n} + p$ – целое; 2) к этому интегралу можно применить тригонометрическую подстановку $u = 2\operatorname{tg} t$. Воспользуемся вторым способом. Тогда

$$du = \frac{2dt}{\cos^2 t} \quad \text{и} \quad \sqrt{u^2+4} = \sqrt{4\operatorname{tg}^2 t + 4} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}} = \frac{2}{\cos t}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(u^2+4)^3}} = \int \frac{\frac{2dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{2}{\cos t}\right)^3} = \int \frac{2\cos^3 t dt}{8\cos^2 t} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \frac{1}{4}\sin t + C.$$

Из $u = 2\,\mathrm{tg}\,t$ теперь находим

$$t = \mathrm{arctg}\frac{u}{2} = \mathrm{arctg}\frac{x+1}{2},$$

и, подставляя в результат интегрирования, окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}} = \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Замечания. 1) Если использовать формулу $\sin(\mathrm{arctg}\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, то окончательный ответ можно записать в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + C.$$

2) Интеграл $\int \frac{du}{\sqrt{(u^2+4)^3}}$, к которому нас привела первая замена, носит промежуточный характер. Решение было бы более коротким, если бы мы сразу перешли от исходного интеграла к интегралу $\frac{1}{4}\int \cos t dt$. Этого можно добиться, если «объединить» замены, т.е. после выделения полного квадрата под знаком радикала сделать замену $x+1 = 2\,\mathrm{tg}\,t$.

Частным случаем интегралов вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ являются интегралы $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Их можно найти, не прибегая к тригонометрическим подстановкам. Действительно, выделим полный квадрат под знаком радикала:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x\right) + c} = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}},$$

а затем сделаем замену $t = \sqrt{|a|}\cdot\left(x + \frac{b}{2a}\right)$.

Получим один из следующих интегралов:

$$\int \frac{\widetilde{A}t+\widetilde{B}}{\sqrt{t^2-q^2}}dt \quad \text{или} \quad \int \frac{\widetilde{A}t+\widetilde{B}}{\sqrt{t^2+q^2}}dt \quad \text{или} \quad \int \frac{\widetilde{A}t+\widetilde{B}}{\sqrt{q^2-t^2}}dt.$$

Эти интегралы можно представить в виде суммы двух интегралов, один из которых легко найти, внеся знаменатель под знак дифференциала, а другой – табличный.

ПРИМЕР. Найти интеграл $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$.

Выделим полный квадрат под знаком радикала:

$$-x^2+6x-8=-(x^2-6x)-8=-(x-3)^2+1$$

и сделаем замену $x-3=t$. Тогда $x=t+3$, $dx=dt$ и

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx=\int \frac{3x+4}{\sqrt{1-(x-3)^2}}dx=\int \frac{3(t+3)+4}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int \frac{3t+13}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Чтобы найти получившийся интеграл, представим его в виде суммы:

$$\int \frac{3t+13}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int \frac{3tdt}{\sqrt{1-t^2}}+13\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=3\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{d(1-t^2)}{(-2t)}+13\arcsin t=$$

$$=-\frac{3}{2}\int \frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}+13\arcsin t=-\frac{3}{2}\cdot\frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+13\arcsin t+C=$$

$$=-3\sqrt{1-t^2}+13\arcsin t+C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получим

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx=-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C.$$

Еще один частный случай интеграла $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ – интеграл $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}$. При его нахождении лучше всего сначала сделать «обратную подстановку» (см. ниже).

2) Метод неопределенных коэффициентов.

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ очень часто удается свести к вычислению интегралов следующих трех типов:

$$\text{(I)} \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \qquad \text{(II)} \int P_n(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}dx,$$

$$\text{(III)} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, n – натуральное число.

Интегралы типа (II) и (III) в свою очередь сводятся к интегралу типа (I). Действительно, Для интеграла типа (II) имеем:

$$\int P_n(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{P_n(x)\cdot\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \int \frac{P_n(x)\cdot(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\widetilde{P}_{n+2}(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

где $\widetilde{P}_{n+2}(x)$ – некоторый многочлен степени $n+2$.

А для приведения интеграла типа (III) к интегралу типа (I) применяют так называемую «обратную подстановку» $x-\alpha=\frac{1}{t}$. Тогда

$$x=\frac{1+\alpha\cdot t}{t}, \qquad dx=-\frac{dt}{t^2}$$

и
$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{t^n dt}{t^2\cdot\sqrt{\frac{a(1+\alpha\cdot t)^2}{t^2}+\frac{b(1+\alpha\cdot t)}{t}+c}} =$$

$$= \int \frac{P_{n-1}(t)}{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}}dt,$$

где $P_{n-1}(t)$ – многочлен степени $n-1$, a_1, b_1, c_1 – некоторые числа.

Теперь рассмотрим интегралы типа (I). Можно доказать, что

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (2)$$

где $Q(x)$ – некоторый многочлен, степень которого ниже чем степень многочлена $P_n(x)$, λ – некоторое число. Это позволяет использовать при вычислении интегралов (I) следующий алгоритм (*метод неопределенных коэффициентов*):

1. Записываем для интеграла (I) формулу (2), в которой полагаем, λ – неопределенный коэффициент, а $Q(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами.
2. Дифференцируем обе части записанного равенства и умножаем обе части получившегося выражения на $\sqrt{ax^2+bx+c}$.
3. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов слева и справа, находим коэффициенты многочлена $Q(x)$ и число λ.

Используя этот алгоритм, мы в итоге сведем интеграл $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ к интегралу $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, который легко находится (выделяем полный квадрат под корнем и вносим соответствующее выражение под знак дифференциала).

ПРИМЕР 1. Найти интеграл $\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$.

Записываем для данного интеграла формулу (2):

$$\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (Ax^2+Bx+C)\cdot\sqrt{x^2-2x+5}+\lambda\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Дифференцируем обе части равенства и получаем:

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} = (2Ax+B)\cdot\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{(Ax^2+Bx+C)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \frac{(2Ax+B)\cdot\left(\sqrt{x^2-2x+5}\right)^2+(Ax^2+Bx+C)(x-1)+\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Умножаем обе части равенства на $\sqrt{x^2-2x+5}$ и находим:

$$3x^3-7x^2+1=(2Ax+B)\cdot(x^2-2x+5)+(Ax^2+Bx+C)(x-1)+\lambda,$$

$$\Rightarrow\quad 3x^3-7x^2+1=x^3\cdot 3A+x^2(2B-5A)+x(10A-3B+C)+(5B-C+\lambda),$$

$$\Rightarrow\quad 3A=3,\quad 2B-5A=-7,\quad 10A-3B+C=0,\quad 5B-C+\lambda=1;$$

$$\Rightarrow\quad A=1,\ B=-1,\ C=-13,\ \lambda=-7.$$

Таким образом, получили

$$\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(x^2-x-13)\cdot\sqrt{x^2-2x+5}-7\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}=$$

$$= (x^2 - x - 13)\cdot\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 7\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} =$$

$$= (x^2 - x - 13)\cdot\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 7\cdot\ln\left|(x-1) + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right| + C.$$

ПРИМЕР 2. Найти интеграл $\int (4x^2 - 6x)\cdot\sqrt{x^2 + 3}dx$.

Приведем интеграл к виду (I). Для этого умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sqrt{x^3 + 3}$:

$$\int (4x^2 - 6x)\sqrt{x^2 + 3}dx = \int\frac{(4x^2-6x)\cdot(x^2+3)dx}{\sqrt{x^2+3}} = \int\frac{(4x^4-6x^3+12x^2-18x)dx}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Записываем для данного интеграла формулу (2):

$$\int\frac{(4x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x)dx}{\sqrt{x^2+3}} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cdot\sqrt{x^2+3} + \lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Дифференцируем обе части равенства и получаем:

$$\frac{4x^4-6x^3+12x^2-18x}{\sqrt{x^2+3}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+3} + \frac{2x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)}{2\sqrt{x^2+3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{4x^4-6x^3+12x^2-18x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{(3Ax^2+2Bx+C)\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 + x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+\lambda}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Умножаем обе части равенства на $\sqrt{x^2+3}$ и находим:

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x = (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^2+3) + x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + \lambda,$$

$$\Rightarrow\quad 4x^4-6x^3+12x^2-18x = x^4\cdot 4A + x^3\cdot 3B + x^2(9A+2C) + x(6B+D) + (3C+\lambda),$$

$$\Rightarrow\quad 4A = 4,\quad 3B = -6,\quad 9A + 2C = 12,\quad 6B + D = 18,\quad 3C + \lambda = 0;$$

$$\Rightarrow\quad A = 1,\quad B = -2,\quad C = 1{,}5,\quad D = -6,\quad \lambda = -4{,}5.$$

Таким образом, получили:

$$\int (4x^2 - 6x)\cdot\sqrt{x^2+3}dx = \left(x^3 - 2x^2 + 1{,}5x - 6\right)\cdot\sqrt{x^2+3} - 4{,}5\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} =$$

$$= \left(x^3 - 2x^2 + 1{,}5x - 6\right)\cdot\sqrt{x^2+3} - 4{,}5\cdot\ln\left|x + \sqrt{x^2+3}\right| + C.$$